TRATADO

DE

ÁLGEBRA ELEMENTAL

ESCRITO PARA USO

DE LOS ALUMNOS DE LA ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA

POR

MANUEL MARIA CONTRERAS,

Profesor de Matemáticas en dicho Establecimiento y en la Escuela Normal,
Ingeniero de minas,
Ensayador y Beneficiador de metales, etc.

DÉCIMA EDICIÓN.

MÉXICO.

ANTIGUA IMPRENTA DE EDUARDO MURGUIA,

CALLE DEL COLISEO VIEJO NÚM. 2.

1902

OBRAS DE TEXTO

DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

MANUEL MARÍA CONTRERAS.

La Aritmética infantil, núm. 1, tiene por objeto facilitar á los niños de tierna edad que adquieran las primeras nociones de aritmética y servir de auxiliar al maestro.

La Aritmética para los niños, núm. 2, es un texto práctico y sencillo por medio del cual puede cualquier alumno adquirir los conocimientos necesarios para ejecutar los cálculos numéricos y prepararse para hacer con facilidad los estudios mercantiles ó profesionales.

La Aritmética razonada, el Algebra, la Geometría y las Trigonometrías, contienen las materias obligatorias para todas las carreras profesionales en 1º y 2º curso de Matemáticas. Fueron escritas, revisadas y corregidas para satisfacer el programa y necesidades de la Escuela Nacional Preparatoria; habiéndose obtenido con el uso de estas obras muy buenos resultados, según lo acreditan los siguientes documentos.

Los que suscribimos certificamos:

1º Que el profesor D. Manuel María Contreras escribió su Tratado de Matemáticas por encargo del director de la Escuela Nacional Preparatoria, con el objeto de satisfacer debidamente el programa del actual plan de estudios.

2º Que el original de su Aritmética fué examinado por los CC. profesores Gabino Barreda, Francisco Díaz Covarrubias, Rafael A. de la Peña é Ignacio Ortiz de Zárate: que el de su Algebra, lo fué por los profesores Manuel Fernández Leal y Luis del Castillo, y que los de su Geometría y Trigonometría lo fueron por los profesores Manuel Ramírez y Francisco Echeagaray, quienes unánimemente los consideraron buenos y adecuados á la enseñanza.

3º Que la junta general de catedráticos de dicha Escuela, ha ratificado esa calificación y los ha aceptado como obras de texto.

4º Que las modificaciones que la experiencia ha indicado y hemos propuesto al autor las ha adoptado, y que seguirá haciendo algunas otras en las posteriores ediciones, con el fin de ir sucesivamente facilitando y mejorando la enseñanza de los alumnos, y

5º Que con el uso de los mencionados tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría, hemos obtenido durante varios años, muy buenos resultados en la instrucción de nuestros discípulos, tanto en las clases del Gobierno como en las particulares.

México, Octubre 16 de 1878.—*M. Fernández.—M. Ramírez.—M. Calderón.—A. Barroso.—F. Echeagaray.—J. Vallarino.—Rafael Barba.—M. Vilamil.—Rafael Angel de la Peña.—Emilio G. Baz.—Luis del Castillo y Pacheco.—Ignacio Ortiz de Zárate.*

Del anterior documento resulta, pues, que las obras de Matemáticas del Sr. Contreras, no solo fueron examinadas y declaradas buenas por personas competentes, sino que con el uso de ellas durante algunos años, se han obtenido buenos resultados en la enseñanza.

Suplicamos á nuestros colegas, se sirvan reproducir el anterior certificado, en honor de una persona que, como el Sr. Contreras, coopera con empeño á la instrucción de la juventud.—*Diario Oficial, Octubre 26 de* 1878.

Los que suscriben, antiguos profesores de la Escuela Nacional de Agricultura y Veterinaria, certifican: que durante los años de 1875 y 1876 han dado la clase de primer curso de matemáticas siguiendo como obra de texto la del Sr. Ingeniero Manuel María Contreras, con notorio aprovechamiento de los alumnos, como consta por las calificaciones que obran en los libros respectivos de exámenes. Como constancia extendemos el presente en México el 21 de Octubre de 1878.—*Manuel Cordero.—José C. Segura.— Vicente U. Alcaráz.*

Como directores de establecimientos de instrucción primaria y preparatoria en esta capital, certificamos: que en nuestros respectivos colegios y durante varios años se han adoptado como obras de texto para la enseñanza de Matemáticas los tratados de Aritmética, Algebra, Geometría y Trigonometría escritos por el Ingeniero Manuel María Contreras, y que con ellos se han obtenido buenos resultados en la instrucción y aprovechamiento de los discípulos.

México, Octubre 18 de 1878.—*Adrián Fournier*, director del Liceo Franco-Mexicano.—*Ricardo Rode*, socio director del Rode's English Boarding School. —*Emilio Katthain.—A Bracho.—Emilio G. Baz*, director del instituto Anglo-Franco-Mexicano.—*M. Soriano.—José Saturnino Yarza*, director del colegio Hispano-Mexicano.—*La Libertad, Octubre* 22 y 31 *de* 1878.

El *Diario Oficial* de Octubre 12 de 1878 publicó la siguiente comunicación:

Escuela Nacional Preparatoria.—Dirección.—Original tengo la honra de remitir á vd. el informe que rindió la comisión de Profesores, á la que se pasó para su examen el Algebra del Sr. D. J. Joaquín Terrazas, la cual se sirvió ese Ministerio remitirme con ese objeto.

Como verá ese Ministerio, la expresada comisión ha creído que dicha obra no es propia para servir de texto en la Escuela: primero, porque su estilo no es apropiado para una obra didáctica; segundo, porque su laconismo se convierte con frecuencia en confusión é insuficiencia; tercero, porque faltan en la obra demostraciones algebráicas de importantes teoremas; cuarto, porque en ciertas doctrinas el autor parece contradecirse sosteniendo aserciones opuestas, por medio de sutilezas y argucias agenas de una obra elemental, como sucede en el caso de la apreciación de los resultados obtenidos cuando se emplea el signo del infinito (∞), ó las cantidades negativas, como factores ó como divisores; en cuyo caso yo agregaré que el espíritu sofístico de que el autor parece hacer alarde en los párrafos respectivos sosteniendo unas veces que una aserción es verdadera y otras que es *falsa* y *falsísima*, y asegurando que el Algebra es *consecuente* pero que no es lógica; que ese espíritu sofístico, repito, en virtud del cual llega á la conclusión de que no es lógica el Algebra, á la que todo el mundo considera como el tipo de la Lógica y de la Deducción, es lo menos á propósito que podía hallarse para ponerlo en manos de los jóvenes que comienzan á hacer su educación, porque con ello se pervertiría su inteligencia, haciéndoles creer que la ciencia consiste en paradojas y falacías; quinto, porque las materias que el autor trata en su obra no satisfacen en puntos importantes, el programa adoptado hace muchos años en la Escuela.

En tal virtud, la junta de catedráticos habida últimamente, propuso como texto para la enseñanza del Algebra, la misma obra que se había seguido hasta aquí; debiendo también tenerse en cuenta, que habría sido necesario una marcadísima superioridad de la nueva obra sobre la anterior, para que pudiera justificarse la extraña medida de seguir en materias tan homogéneas como la Aritmética y el Algebra, dos autores distintos como textos.

También me parece oportuno llamar la atención del Ministerio, sobre que el capítulo primero de la Algebra del Sr. Terrazas que constituye una verdadera introducción ó un conjunto de consideraciones generales, por las cuales la comisión tributa débiles elogios al autor, supuesto que esas consideraciones generales facilitan el estudio de la ciencia algebraica y dan á conocer su verdadero espíritu y el campo de sus investigaciones, que no es otro sino el de las relaciones y no el del valor mayor ó menor de las magnitudes que considera: que este capítulo primero, repito, cuya presencia constituye una mejora y una novedad en los tratados de Algebra, no es en el fondo más que la reproducción en diversos términos de las verdades fundamentales establecidas casi exactamente en el mismo orden lógico, aunque con distintos ejemplos concretos, en la introducción del Algebra del C. Contreras, que fué el primer tratado elemental que introdujo tan útil novedad.

Si el C. Terrazas hubiera tenido presente al redactar su tratado, la verdad fundamental establecida en la introducción del Algebra que sirve de texto en la Escuela y en el capítulo primero de la suya propia, y que consiste, repito, en que el Algebra no considera valores sino relaciones abstractas, no habría sin duda llegado á las conclusiones paradógicas á que he hecho alusión arriba, al tratar de las cantidades negativas, porque todas esas confusiones dependen del olvido de ese principio fundamental.

Libertad, Orden y Progreso, México, Agosto 31 de 1877.—*G. Barreda.*—Ciudadano Ministro de Justicia é Instrucción pública.—Presente.

El razonado informe á que se refiere el Sr. Director de la Escuela Nacional Preparatoria, puede leerse en el Diario Oficial de Octubre 18 de 1878. Fué emitido por el Sr. Ingeniero Manuel Fernández, que era Profesor de Matemáticas, y que actualmente tiene á su cargo la Secretaría de Estado y del Despacho de Fomento, y por los distinguidos Profesores Rafael Angel de la Peña y Manuel Ramírez. El final del citado informe es como sigue:

"Por todo lo expuesto, somos de parecer, que si bien no está destituido de mérito el tratado elemental de Algebra escrito por D. J. Joaquín Terrazas, no es conveniente adoptarlo como obra de texto en la Escuela N. Preparatoria.

Orden y Progreso. México, Agosto 6 de 1877.—*M. Fernández.*—*Rafael Angel de la Peña.*—*Manuel Ramírez.*—C. Gabino Barreda, Director de la Escuela Nacional Preparatoria.—Presente."

Después de haber estudiado detenidamente las obras de texto, escritas por el Profesor Manuel María Contreras y por D. J. Joaquín Terrazas, en cumplimiento de un acuerdo de la Secretaría de Justicia é Instrucción Pública, siete de los Profesores de 1º y 2º curso de Matemáticas de la Escuela Nacional Preparatoria opinaron, en 1º de Septiembre de 1897: 1º, que las obras de Contreras satisfacen las necesidades de la enseñanza en cursos semestrales; y 2º, que en competencia con las del Sr. Terrazas deben preferirse las de Contreras. La opinión de esos Profesores es de toda confianza, por su honorabilidad, por su competencia, por su práctica y porque su misión oficial les obliga á procurar los mejores resultados en la enseñanza. La mejor prueba de la utilidad de las obras del Profesor Contreras, es que por más de 20 años han servido de texto en los Estados, en varios Establecimientos de la Capital y en la Escuela N. Preparatoria con excelentes resultados, supuesto que de los alumnos examinados en 1º y 2º curso de Matemáticas han sido aprobados más del 80 por ciento.

ÁLGEBRA

INTRODUCCION.

En Aritmética hemos estudiado una parte del cálculo en la cual nos proponemos encontrar el valor numérico de una cantidad engendrada por los datos del problema en conformidad con las condiciones especiales del enunciado. Pero el dominio de las Matemáticas reducido á este modo directo de resolver en cada vez un problema determinado y especial, aunque más extenso, en el fondo, de lo que generalmente se cree, sería sin embargo, demasiado limitado todavía para satisfacer las exigencias del espíritu humano y las necesidades de la ciencia y de la práctica.

Ha sido, pues, forzoso valerse de un medio mas propio de resolver de un modo general las cuestiones que pueden presentarse, en vez de tener que dar una resolución particular para cada uno de los casos.

Para este importante fin, que ha hecho del cálculo el más poderoso instrumento lógico de que el hombre puede disponer, ha bastado reconocer que, en cada género de cuestiones, hay dos especies de elementos esencialmente diversos, aunque ambos concurren de una manera necesaria á la solución definitiva que se busca en cada una de ellas. De estos dos elementos, el uno es peculiar á cada una de las cuestiones que hay necesidad de resolver, mientras que el otro es común á un gran número, por cuyo motivo se llaman estas cuestiones semejantes ó de la misma especie.

Si, pues, por un artificio cualquiera logramos separar estos dos elementos, y hacer que la resolución de un problema sea relativa á lo que en él hay de general, prescindiendo de todo aquello que le es particular, y por decirlo así, individual, sin perjuicio de completar después la resolución obtenida con todo aquello que depende directamente de los elementos de que se ha hecho abstracción; habremos dado un gran paso en la institución de la ciencia del cálculo; porque habremos logrado resolver en una sola operación todo lo que hay de esencial en las cuestiones de una misma especie; y esto es lo que se ha conseguido por medio del Algebra.

Aclararemos esto con un ejemplo. Supongamos que se nos pide cuál será el rédito que producirá un capital de 6,000 pesos impuesto al 5 por 100 de interés, en un año.

Según lo que hemos visto en Aritmética, la resolución la obtendremos planteando y resolviendo una regla de tres directa que nos dará por resultado $300 de rédito en la forma siguiente:

$$100 : 6{,}000 :: 5 : x = \frac{6000 \times 5}{100} = \$300$$

Si después nos preguntan cuánto producirán $8,000 al 6 por 100, tendremos que plantear y resolver la siguiente proporción:

$$100 : 8{,}000 :: 6 : x = \frac{8000 \times 6}{100} = \$480$$

para sacar que producirán $480 de rédito.

Examinando estas dos cuestiones encontramos que las relaciones que existen entre los datos y la cantidad que se busca son en ambas y en todos los problemas de este género, constantes y enteramente independientes de su respectivo valor numérico; y que para obtener el resultado habrá siempre que multiplicar el capital por el interés y dividir por 100. Esta relación invariable que se nota entre los datos del enunciado y la incógnita, ó en otros términos, este modo de generación del resultado que se busca, es lo que hay de común en todos los problemas de esa clase, y su expresión constituye la resolución algebráica de la cuestión: el valor numérico de los datos y el de la incógnita que de ellos se deriva, varía en cada caso; y pertenece al dominio de la Aritmética determinar el valor numérico del resultado particular de cada cuestión.

El artificio lógico de que los matemáticos se han valido para separar estas dos partes integrantes de cada problema y poder así obtener las ventajas que hemos indicado, consiste: 1.° en expresar por medio de símbolos, (como las letras del alfabeto) que no tengan por sí mismos valor numérico alguno, las cantidades que conforme al enunciado estén relacionadas; y 2.° en expresar estas relaciones, es decir, el modo especial como la incógnita es engendrada por los datos, por medio de los signos con que en Aritmética indicamos las operaciones que se han de ejecutar y las relaciones de igualdad ó desigualdad.

Así, en los ejemplos que hemos propuesto representaríamos por c el capital, por r el rédito y por x el valor que se busca, con lo cual no habremos prejuzgado nada sobre el valor numérico de cada uno de estos elementos de la cuestión y diríamos:

$$100 : c :: r : x \text{ de donde } x = \frac{c \times r}{100}.$$

Por este medio expresamos en un lenguaje claro y conciso las *relaciones matemáticas abstractas* que hemos descubierto entre los datos y la incógnita, ó el modo como ésta se deriva de aquellos; y á esto es á lo que hemos llamado resolución algebráica, ó *abstracta* de las cuestiones.

Esta expresión $x = \frac{c \times r}{100}$ es en el lenguaje algebráico una *fórmula* que traduciríamos en el lenguaje común, diciendo que *el rédito producido por un capital cualquiera, es igual al producto de este capital por el interés dividido por* 100.

Se comprende que la cifra 100 que se ha puesto en la fórmula, de acuerdo con la costumbre de referir á 100 el interés, se podía representar por otro símbolo, por la letra p, por ejemplo, y entonces la fórmula quedaría:

$$x = \frac{c \times r}{p}$$

De esa manera la fórmula habría adquirido mayor generalidad, pues podría servir no sólo para darnos á conocer el producto de un capital con el interés referido á 100; sino á 1, á 1,000 ó á cualquier otro término de comparación que quisiera elegirse. Esta mayor generalidad de la fórmula depende precisamente de que hemos hecho desaparecer el único valor numérico, es decir, concreto, que al principio le habíamos dejado para hacerla más práctica, lo cual deja ver con mayor claridad, aún, las ventajas del artificio de emplear símbolos que dejen las cantidades numéricas indeterminadas.

Por lo demás, bien sea empleando la fórmula algebráica, ó por medio de la regla general que de ella se deduce traduciéndola al lenguaje común, de cualquiera de estos modos habrán quedado prescritas las operaciones aritméticas que es necesario ejecutar con los datos para conocer el valor numérico de la incógnita, siendo obvia la inmensa ventaja que desde el punto de vista de la concisión, de la claridad y de la precisión presenta la fórmula ó locución algebráica, sobre la regla expresada en el lenguaje ordinario.

Si comparamos la resolución algebráica de los problemas que hemos puesto como ejemplos, con su resolución aritmética, podremos ya percibir con toda claridad en lo que consiste su diferencia.

La Aritmética ha contestado con un número á cada una de las preguntas; al primer problema ha dado por respuesta el número 300, al segundo el número 480, sin que estos resultados nos den una idea del modo de su generación.

El Algebra ha contestado con una ecuación $x=\frac{c \times r}{100}$ ó $\frac{c \times r}{p}$ que puede servir para resolver todas las cuestiones de réditos.

El resultado de la Aritmética ha sido un número; el del Algebra una fórmula ó regla general. En Aritmética, aunque los problemas sean semejantes, hay que establecerlos y repetir todas las operaciones para la resolución de cada uno de ellos. En Algebra, este trabajo se hace una sola vez para siempre obteniéndose como resultado una expresión en la que quedan fijadas de un modo general las relaciones que existen entre las cantidades de la cuestión.

Pero el Algebra no nos da el valor numérico de la incógnita, su respuesta definitiva es siempre lo que se llama una ecuación, es decir, una relación de igualdad entre la cantidad que se busca y cierta combinación de los datos del enunciado que indican el modo de generación de la incógnita. Si después de esto queremos obtener la resolución aritmética, será preciso ir sustituyendo en la fórmula obtenida, el valor numérico que cada uno de los datos tiene en el problema que trata de resolverse, y ejecutar por último las operaciones indicadas en la fórmula.

Así, para la primera cuestión, de las dos que hemos puesto como ejemplos, tendremos que poner en la fórmula $x=\frac{c \times r}{100}$ en vez de c, 6,000 pesos, en lugar de r, 5; y la fórmula se convertirá en $x=\frac{6000 \times 5}{100}$

Hasta aquí aunque se hayan reemplazado las literales de la fórmula por sus valores numéricos, mientras se tenga presente que 6,000 representa el capital y 5 el tanto por ciento, la expresión $x=\frac{6{,}000 \times 5}{100}$ no ha perdido en el fondo su carácter algebráico supuesto que representa las *relaciones abstractas* que existen entre el capital y el tanto por ciento con el rédito que se busca; lo cual constituye en la esencia el carácter del Algebra. Para que la resolución llegue á ser aritmética, es necesario como lo hemos indicado, considerar los datos de la cuestión como especiales de ella sola, esto es, pasar de lo *abstracto* á lo *concreto* y ejecutar las operaciones indicadas para obtener el resultado numérico que exige la cuestión, (300 pesos en el ejemplo propuesto). El uso de las literales en Algebra como símbolos, es un medio en extremo útil para conseguir dar á los resultados la generalidad que se busca, indicando el modo de generación de unas cantidades por medio de otras, supuesto que no teniendo las literales por sí mismas ningún valor, con ellas se pueden representar de un modo general los datos y los resultados de las cuestiones y las operaciones que deban efectuarse; pero la parte esencial no consiste en el uso de las literales, sino en considerar las cuestiones en *abstracto*, sea representando las cantidades con letras ó con números á fin de llegar á determinar las relaciones más sencillas que hay entre los datos y las incógnitas.

Por lo expuesto se ve que, aunque tanto la Aritmética como el Algebra se proponen resolver las cuestiones matemáticas, cada ciencia se toma solo una parte de la tarea y entre las dos forman la ciencia entera del cálculo.

El Algebra averigua en virtud de las relaciones explícitas ó conocidas, que en el enunciado se indican entre los datos y la incógnita otras relaciones implícitas ó no expresadas en él, y como consecuencia da á conocer las operaciones aritméticas que habrá que ejecutar para determinar su valor. La Aritmética ejecuta estas operaciones y determina el valor numérico y concreto que se busca. La primera expresa el valor de la incógnita, manifestando su igualdad con una combinación precisa y determinada de los datos, expresada en una fórmula, y la segunda resolviendo esta fórmula encuentra este valor, expresándolo en el sistema ordinario de la numeración.

De aquí resulta que la Aritmética no puede ejecutar ninguna operación de cálculo sin conocer préviamente el valor numérico de cada uno de los datos del enunciado, mientras que al Algebra le basta saber las relaciones exactas que hay entre ellos con absoluta independencia de su valor en números. Por este motivo Augusto Comte en su apreciación filosófica del cálculo, á la primera parte le llama *cálculo de los valores*, y á la segunda, *cálculo de las funciones* ó de las relaciones; y sobre estas denominaciones, como se ve, estamos enteramente de acuerdo.

Un valor expresado de la manera que acabamos de ver que lo hace el Algebra, es decir, igualándolo á una combinación de operaciones de otras cantidades, se dice que *es función* ó que *está en función* de estas cantidades. Así, en el ejemplo que venimos analizando, diremos que x está en función de c y de r; ó de otro modo que el rédito producido es una función del capital y del interés que se debe pagar.

Haremos notar que esta condición esencial del espíritu algebráico de no atender sino á las relaciones de las magnitudes consideradas, de prescindir del valor numérico y de no fijarse sino en las funciones, trae como indeclinable consecuencia la obligación para el Algebra de conservar siempre uno por lo menos de los modos reales de formación del valor que se busca.

Una necesidad se convierte aquí, como en otras muchas veces, en una preciosa ventaja. Al tener que expresar su resultado final precisamente por una función, el Algebra se ve obligada á consignar en él los elementos de que emanó y en los cuales por lo mismo se resuelve analíticamente. El carácter á la vez analítico y sintético que en tal virtud tiene toda resolución algebráica, no es útil tan solo porque deja consignadas las operaciones ejecutadas para obtenerla, sino por la libertad que deja, cuando se desea combinar con otros el valor obtenido, de tomar para ello unas veces el resultado sintético y otras los elementos analíticos de que procede, lo cual es una inmensa ventaja, tanto para las matemáticas puras como para su aplicación.

Supongamos por ejemplo, que por una parte tenemos:

$a \times b+c=d$ y por otra sabemos que
$d=h+c$

si en la primera ecuación sustituimos por d su valor, tendremos:

$$a\times b+c=h+c$$

y como fundándonos en que si á cantidades iguales se quitan iguales, los resultados serán iguales, podemos suprimir c de los dos miembros de la última ecuación y resultará:

$$a\times b=h$$

relación que no habría podido descubrirse sin combinar las dos ecuaciones de que ha procedido.

No es posible en esta introducción dar una idea ni aun ligeramente, de las ventajas que esta propiedad de las ecuaciones algebráicas puede proporcionarnos para la resolución de las más complicadas cuestiones; pero ellas se harán fácilmente perceptibles en lo de adelante, una vez que hemos llamado sobre esto la atención.

Siendo el cálculo algebráico un instrumento de transformación que sirve para cambiar una indicación en otra indicación, el fin que se propone el Algebra al tratar una cuestión de su resorte, es llegar á encontrar aquella combinación de las magnitudes conocidas que exprese de la manera más sencilla ó más adecuada á nuestras necesidades, el valor de las desconocidas.

Para llegar á esta ecuación final hay que pasar con frecuencia por otras muchas y que hacer simplificaciones y trasformaciones diversas de que por ahora no debemos ocuparnos, supuesto que sólo hemos querido dar una idea general de la parte de la ciencia que vamos á estudiar. Con este objeto hemos buscado ejemplos sencillos para dar á conocer el verdadero carácter científico del Algebra, el método que emplea y el objeto que se propone en sus investigaciones; pero sin tratar de las dificultades que para lograrlo tiene que superar, porque no estamos todavía en aptitud de poderlas apreciar; ni esto es necesario para la inteligencia de lo que tenemos que explicar desde luego.

Las generalidades que anteceden son, sin embargo, suficientes para comprender las siguientes definiciones.

239.—Definiciones.—*Se llama Algebra la parte de las Matemáticas que se ocupa del estudio de las relaciones de las cantidades. Su objeto es determinar el modo de formación de una cantidad desconocida por medio de ciertas relaciones que existen entre las cantidades conocidas.*

Considerando las cantidades de un modo abstracto ó general en Algebra, al expresar la formación de una cantidad desconocida por medio de las conocidas, conseguimos establecer reglas generales para resolver todas las cuestiones semejantes á la propuesta; dejando consignados los elementos analíticos y sintéticos del resultado.

Ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, cuyo modo de formación generalmente es diferente.

Esos modos de formación provienen siempre de una combinación de operaciones efectuadas con las cantidades que se consideran.

Plantear un problema es formar una ó varias ecuaciones con las cantidades conocidas y las desconocidas.

Resolver un problema es encontrar el valor de cada incógnita expresado en función de cantidades conocidas.

240.—Signos usados en algebra ó lenguage algebraico propiamente dicho.—De lo que llevamos expuesto se deduce, que el estudio del Algebra debe comprender dos partes, que aunque confundidas comunmente, son del todo independientes y de muy diversa importancia. La primera constituye el verdadero objeto de la ciencia y es el que hemos expresado en la definición que antecede, dando á la ciencia por objeto el estudio de las relaciones de las cantidades consideradas de un modo general; la segunda parte es un lenguaje particular, el cual como hemos indicado ya, es-un medio que permite ocuparse de estas relaciones abstractas sin tener en cuenta el valor numérico de las cantidades.

Vamos, pues, á exponer brevemente el mecanismo de este lenguaje que, como artificio lógico para alcanzar el fin que se propone el Algebra, es verdaderamente precioso y admirable por su sencillez y eficacia.

Los signos son ciertas señales usadas para representar las cantidades y las operaciones hechas ya ó por hacer. En el cálculo los signos nos sirven como instrumentos de razonamiento en extremo útiles por su claridad y precisión para descubrir lo desconocido y las relaciones que existen entre las cantidades. El Algebra hace uso como signos, de las literales, de los números y de los signos que hemos dado á conocer en Aritmética.

1.° *Las literales,* que son las letras del alfabeto común y griego, sirven para indicar cantidades con cualquier valor. Comunmente se representan con las primeras del alfabeto las cantidades conocidas de un problema, y con las últimas x, y, z, las incógnitas. Además, se suelen distinguir las literales poniéndoles arriba uno, dos ó tres acentos, y aun los números romanos, así: a', a'', a''', a^{IV}, que se leen, *a prima, a biprima, a triprima, a cuarta;* y otras veces se distinguen poniéndoles abajo los números cardinales, como sigue: a_0, a_1, a_2, etc., y se leen: *a con cero, a con uno, a con dos;* ó *a índice* 0, *a índice* 1, *a índice* 2. En Algebra se emplean con más frecuencia las letras minúsculas.

2.° *Los signos indican las operaciones que conocemos y la relación de las cantidades,* y son: $+$ más, $-$ menos, $\times$ multiplicado por, $\div$: dividido por, $\sqrt{}$ raíz de, $=$ igual, $>$ mayor, y $<$ menor. Las cantidades que no están precedidas de algún signo se supone que tienen el signo $+$. La multiplicación se indica poniendo las cantidades unas á continuación de otras sin el signo, así: $4\,a\,b$ expresa $4 \times a \times b$; pero cuando hay que indicar la multiplicación entre dos números, se pone precisamente el signo 3×4 ó 3.4 para evitar el error á que daría lugar su omisión. Cuando hay que multiplicar la suma ó diferencia de varias cantidades, se colocan estas dentro de un paréntesis $(3a+b-c)\,(a-b)$ expresa que el valor de $3a+b-c$ debe multiplicarse por el de $a-b$. Si la operación se expresara por $(3a+b-c)\,a-b$ esto indicaría que el resultado $3a+b-c$ se ha de multiplicar por solo a, y después del producto se restaría b. Por último, si se tiene la expresión $3a+b-c\,(a-b)$ esto indica que del valor $3a+b$ se ha de restar el producto de c por la diferencia entre a y b.

La división de las cantidades se representa comunmente en Algebra en forma de quebrado, $\frac{a}{b}$ indica que el valor de la cantidad que representa a se ha de dividir por el de la que expresa b, y se lee: *a, dividido* ó *partido por b.*

3.° *Los números comunes* tienen cuatro usos: representar el valor efectivo de las cantidades que entran en los cálculos; expresar las veces que una cantidad entra como sumando; indicar la potencia de una cantidad ó el número de veces que ésta entra como factor; y señalar el índice de las raíces.

Se llama coeficiente el número que precede á una literal indicando cuántas veces entra la literal como sumando en el resultado. Así, $3ab$, representa $ab+ab+ab$.

Algunas veces se extiende el significado de esta expresión al valor que multiplica á una cantidad aunque no esté compuesto de sólo números, así en $4ab\sqrt{c}$ se dice que $4ab$ es el coeficiente de $\sqrt{c}$; aunque si la expresión no fuera radical 4 sería el coeficiente.

Se llama exponente el número que indica cuántas veces entra una cantidad como factor en el resultado. Así a^4 indica la operación:

$$a\times a\times a\times a.$$

No se debe confundir el coeficiente con el exponente: el uno indica las veces que una cantidad entra como sumando y el otro las que entra como factor en el resultado. En la expresión $4a$, 4 es el coeficiente, y en a^4 el mismo número es el exponente, y si a, por ejemplo, representa el valor de 5, se tendrá que $4a=20$, y $a^4=625$. Toda cantidad sin coeficiente ó sin exponente, se supone que tiene por coeficiente ó por exponente la unidad; porque toda cantidad multiplicada por 1 ó elevada á la primera potencia, produce la misma cantidad, en consecuencia, en estos casos será superfluo indicar el coeficiente ó el exponente. *Se llama índice de un radical, el número que indica la potencia á que se ha de elevar una cantidad para producir la que está debajo del radical.*

Se llama expresión á la indicación de cualquier valor algebráico.

241.—Definiciones.—*Se llama término toda expresión algebráica separada de otra por los signos* $+$ ó $-$, esto es, que se compone del producto, del cociente, de la potencia ó de la raíz; pero no de la suma ó diferencia de algunas cantidades.

Por ejemplo:

$$a,\ 3ab,\ \frac{5\,b}{a}\ \text{y}\ \sqrt[5]{a\,b}\ \text{son términos algebráicos.}$$

Se llama monomio la expresión que consta de un solo término como $3a^2\,b^6$, ó $\dfrac{5\,b^3}{2\,a^2}$. A los monomios se les llama valores incomplexos.

Se llama binomio la expresión que se compone de dos términos, como $2a-c$.

Se llama trinomio toda cantidad algebráica compuesta de tres términos, como $2a+\frac{b}{2d}-3h^2c$.

Se llama polinomio toda expresión algebráica compuesta de muchos términos, como $\frac{a}{b}-\sqrt{dc}+2ah^3-\frac{5b}{a+b}-2d^2\sqrt[5]{c}$. A los polinomios se les llama expresiones complexas.

Se llaman términos positivos, los que están precedidos del signo más; y negativos los que lo están del signo ménos. Repetiremos que el signo $+$ se omite delante del primer término de una expresión.

Se llaman términos semejantes los que se componen de las mismas literales afectadas respectivamente de los mismos exponentes, ó de iguales radicales. Así $3a^2bc$ y $-2a^2bc$ son términos semejantes, lo mismo que

$$\frac{5bc^3d}{a-b} \text{ y } \frac{8bc^3d}{a-b}; \quad 5\sqrt[3]{a^2}, \quad 7\sqrt[3]{a^2}, \quad \text{y} \quad 9\sqrt[3]{a^2}.$$

Los términos semejantes pueden tener desiguales los coeficientes, los signos y el orden de los factores.

Se llama grado ó dimensiones de un término algebráico el número de factores literales que lo forman. El coeficiente numérico de un término no se estima para determinar su dimensión. Cuando un término tiene literales con exponentes, se suman éstos para determinar el grado: cuando el término tiene la forma fraccionaria, se restan las dimensiones del denominador de las del numerador, y cuando es un radical se dividen las dimensiones de la cantidad que está debajo del signo por el índice de la raíz para obtener las dimensiones ó grado del término.

Las dimensiones de $15a^2bc^3$ son 6; las de $\frac{5a^2bc^3}{2\,b^4}$ son 2; y las de $\sqrt[3]{\frac{3b^3cd^4}{5a^2}}$ son 2.

Se llaman términos homogéneos los que tienen las mismas dimensiones. Así ab, $\frac{bd^2}{c}$, $3a^2$ y $\sqrt[3]{bd^2c^3}$ son términos homogéneos.

Las *expresiones* algebráicas pueden ser racionales, irracionales, enteras y fraccionarias.

Expresión racional es la que no contiene ningún radical, como

$$5ab-\frac{d^2}{a}+2ab^2,$$

ó que puede tener raíz exacta como $\sqrt{a^2}=a$

Expresión irracional es la que contiene algún radical, como

$$a+\sqrt[2]{b\,c^2}$$

Se dice que la expresión es entera cuando no contiene el signo de la división, como $2a^2+b-cd$.

Una expresión es fraccionaria cuando contiene el signo de la división como

$$\frac{a^2-b^2}{c}$$

En una cantidad se distingue su valor *absoluto, relativo* y *numérico.*

El valor absoluto de una cantidad, es el que tiene sin atender á su signo.

El valor relativo ó algebráico, es el que tiene considerando el signo de la cantidad. En Algebra, para determinar la relación de unas cantidades con otras, es indispensable atender al signo que indica la operación que debe ejecutarse con la cantidad que lo lleva.

El valor numérico de una expresión algebráica, es el número que se obtiene reemplazando cada literal por su valor y ejecutando las operaciones indicadas en la expresión propuesta.

Ecuación hemos dicho que es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, cuyo modo de formación generalmente es diferente. Se indica poniendo el signo igual $=$ entre las dos expresiones, llamándose á la que queda á la izquierda del signo $=$ primer miembro de la ecuación, y á la que queda á la derecha, segundo miembro de la ecuación.

Se llama desigualdad toda expresión que indica que dos cantidades tienen valores diferentes: se indica por el signo $>$ ó $<$ poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura: $2a+b> a$ se lee: $2a+b$ mayor que a.

Fórmula es una expresión algebráica en la que están indicadas las relaciones abstractas que existen entre las cantidades de un problema, conforme á la naturaleza de éste. Generalmente en toda fórmula, las relaciones que ligan entre sí las cantidades del problema están expresadas en una forma sencilla y adecuada, sea para indicar el modo de formación de la incógnita, sea para resolver problemas semejantes al propuesto, sea para descubrir otras relaciones entre las cantidades que son objeto de la cuestión.

242.—Axiomas.—Los axiomas usados con más frecuencia en Algebra, son los siguientes:

Dos cantidades iguales á una tercera son iguales entre sí:

Si á cantidades iguales se agregan ó quitan iguales, los resultados serán iguales.

Si con cantidades iguales se ejecutan las mismas operaciones, los resultados serán iguales.

SUSTITUCION Y REDUCCION.

243.—Sustitución.—*Es la operación que tiene por objeto reemplazar en una expresión por una cantidad su valor y ejecutar después las operaciones indicadas.*

Comunmente la sustitución se efectúa al fin de una operación algebráica poniendo en lugar de las literales los valores que les corresponden en un caso dado, con el objeto de determinar *el valor numérico* de la expresión algebráica. Si por ejemplo, se tiene $x=\sqrt{2ge}$, y además se sabe que $g=9$, y $e=60$, sustituyendo los valores de g y de e se obtiene

$$x=\sqrt{2\times9\times60}$$

y ejecutando las operaciones indicadas se obtiene el valor numérico de

$$x=32'86$$

Otras veces la sustitución se hace reemplazando unas cantidades por sus valores aunque no sean numéricos. Por ejemplo, si se ha determinado que el cuadrado de una cantidad compuesta de dos partes a y b está expresado por la fórmula.

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

y se tiene que $a=\frac{c}{d}$ y $b=\frac{h}{d}$, la sustitución de estos valores nos dará

$$\left(\frac{c}{d}+\frac{h}{d}\right)^2=\frac{c^2}{d^2}+\frac{2ch}{d^2}+\frac{h^2}{d^2}=\frac{c^2+2ch+h^2}{d^2}$$

244.—Reducción.—*Esta operación tiene por objeto formar un solo término con el valor de varios.*

La reducción sólo puede tener lugar cuando los términos son semejantes, esto es, compuestos de las mismas literales afectadas respectivamente de los mismos exponentes ó de los mismos radicales, es decir, aquellos términos que no difieren más que en los signos y en los coeficientes.

Si se tiene por ejemplo, $7ab+5ab$

la operación indicada es, que el valor de $5ab$ se ha de sumar con el de $7ab$; pero como el valor del producto ab es igual, la suma total la hallaremos sumando los coeficientes $7+5=12$ y multiplicando este número por ab, esto es:

$$7ab+5ab=12ab$$

basta concebir el término $7ab$ formado de la suma de siete términos iguales, ab, y el $5ab$ de cinco términos iguales, ab, para explicarse el fundamento de sumar los coeficientes.

Si se tiene: $$h-7ab-5ab$$

la operación indicada es, que de el valor de h se debe restar primero $7ab$ y en seguida $5ab$, pero como lo mismo es restar todas las partes de una cantidad que restar ésta, y $7ab$ y $5ab$ son las partes de $12ab$, tendremos:

$$h-7ab-5ab=h-12ab$$

en estos ejemplos en los que los signos de los términos son iguales, hemos sumado los coeficientes afectando el resultado del signo común de los términos.

Si se tiene por ejemplo, $7ab-5ab$

en este caso la operación indicada es, que de el valor de $7ab$ debemos restar el de $5ab$; pero como $7ab=2ab+5ab$ y $5ab-5ab=0$

se tiene: $$7ab-5ab=2ab+5ab-5ab=2ab$$

y por tanto, $$7ab-5ab=2ab$$

Cuando los signos son desiguales se restan los coeficientes, y el resultado se afecta del signo que tiene la cantidad mayor.

Se ve, pues, que *en la reducción pueden ocurrir dos casos:* 1.° *los términos semejantes pueden estar afectados del mismo signo; entonces se suman los coeficientes dejando al resultado el mismo signo, y á continuación de la suma de los coeficientes se ponen las literales de uno de los términos semejantes sin variación alguna*; 2.° *los términos semejantes pueden tener signos desiguales; entonces se restan los coeficientes, se afecta el resultado del signo del mayor término, y á continuación de la diferencia de los coeficientes se escriben las literales sin variación.*

Si se trata de hacer las reducciones posibles en la expresión siguiente compuesta de más de dos términos:

$$15a^3bc^2-3a^3c^2b+5a^3bc^2+2a^3c^2b-10a^3bc^2$$

supuesto que el orden de las sumas y de las restas no altera el resultado, reduciremos primero los términos positivos, en seguida los negativos, y por último, haremos la reducción entre los dos términos encontrados:

$$15a^3bc^2-3a^3c^2b+5a^3bc^2+2a^3c^2b-10a^3bc^2=22a^3c^2b-13a^3c^2b=9a^3c^2b$$

Cuando se tienen dos términos iguales con signos contrarios, sus valores se destruyen, esto es, dan cero por resultado; porque la diferencia entre cantidades iguales es 0.

Por ejemplo: $5a^2bc-5a^2bc=0$

REGLA.—*Para ejecutar la reducción en un polinomio, búsquense los términos semejantes: súmense primero los coeficientes de los que estén precedidos del signo +, en seguida súmense los coeficientes de los que estén precedidos del signo —, réstese el coeficiente menor del mayor, y afectando el resultado del signo de la cantidad mayor se hará seguir el coeficiente encontrado de las literales de uno de los términos semejantes sin ninguna variación.*

Cuando un término no tiene signo, lo repetiremos, se le supone precedido del signo +.

245—ADICIÓN.—La adición tiene en Algebra el mismo objeto que en Aritmética: reunir en una expresión el valor de varias.

Para sumar las cantidades en Algebra, se ponen todos los términos unos á continuación de los otros con sus signos, y en seguida se hace la reducción de los términos semejantes.

Sea por ejemplo sumar las tres expresiones siguientes:

$$\begin{array}{r} 3a^2b+2bc-d^2 \\ 5a^2b-2d^2-3bc \\ -2a^2b-5bc+5d^2 \\ \hline 6a^2b-6bc+2d^2 \end{array}$$

La ejecución de la adición no presenta dificultad cuando se sabe determinar los términos semejantes y ejecutar la reducción correspondiente, teniendo cuidado de afectar del signo + el primer término de cada expresión cuando no lleva signo. La suma en Algebra, no siempre es mayor que alguno de los sumandos, pues depende de la relación que pueda haber entre el valor de las cantidades positivas y negativas que la formen.

246.—SUSTRACCIÓN.—La sustracción tiene por objeto encontrar la diferencia entre dos cantidades, ó buscar una que sumada con el sustraendo dé el minuendo.

REGLA.—*Para restar las cantidades en Algebra se cambian los signos á todos los términos del sustraendo, y en seguida, se hace la reducción de los términos que resulten semejantes á los del minuendo.*

Si se quiere restar de $a+b$ la expresión $b-c$, conforme á la regla, tendremos:

$$[a+b]-[b-c]=a+b-b+c=a+c$$

Demostración.—Vamos á demostrar que cuando tenemos que restar de una cantidad a un binomio $b-c$ el resultado será igual al minuendo a seguido de los términos del sustraendo con los signos cambiados, esto es, que

$$a-[b-c]=a-b+c$$

Sabemos que la diferencia entre dos cantidades no se altera cuando se les agrega ó quita á ambas, cantidades iguales. En consecuencia, podremos agregar al minuendo y al sustraendo, los términos del sustraendo con los signos cambiados, sin alterar el valor de la diferencia, esto es:

$$a-[b-c]=[a-b+c]-[b-c-b+c]$$

pero como $b-b=0$, y $-c+c=0$, resulta que

$$a-[b-c]=a-b+c$$

lo que equivale precisamente á cambiar los signos del sustraendo. Como en el caso escogido para la demostración, el sustraendo consta de una cantidad positiva b y otra negativa c, que pudieron haber sido polinomios, no obstante su sencillez es el más general que puede presentarse, y en cualquiera otro el mismo procedimiento de agregar el sustraendo con signos cambiados á los dos términos conducirá al resultado prescrito por la regla.

Por vía de ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

1.º $[4ab-3c^2+2bc]-[2ab-2c^2-bc]$
2.º $[4ab^2-3b^2c]-[2ab^2-6b^2c]$
3.º $[5a^3-3ac^2]-[2a^3-3ac^2]$

Ejercicios.—Hacer las sumas y restas que se indican en seguida:

$$\begin{array}{r} 5a^4+3a^2b^2c-\ 7ab^4 \\ -6a^4+2a^2b^2c+17ab^4 \\ +9a^4-8a^2b^2c-10ab^4 \\ +3a^4-5a^2b^2c-\ 7ab^4 \end{array}$$

Resolución: $11a^4-8a^2b^2c-\ 7ab^4$

$$[5b-8a-3c]-[7a-3b-2c]$$

R. $8b-15a-c$

$$[a+b]-[2a-3b]-[5a+7b]-[-13a+2b]$$

R. $7a-5b$

$$[5a^3-4a^2b-4ab^2+8b^3]-[2a^3-5a^2b-6ab^2+b^3]$$

R. $3a^3+a^2b+2ab^2+7b^3$

247.—Multiplicación de los monomios.—En un monomio hay que atender á cuatro cosas: *signos, coeficientes, literales y exponentes.* Si, por ejemplo, tenemos que multiplicar:

$$3a^2bc\times2a^3b^2$$

observaremos que como el valor del producto no se altera cuando se invierte el orden de los factores,

$$3a^2bc\times2a^3b^2=3\times2a^2a^3bb^2c$$

Respecto de los coeficientes para obtener el producto 3×2, *multiplicaremos estos números por las reglas de Aritmética.*

En cuanto á las literales iguales afectadas de exponentes, bastará descomponerlas en sus factores, para deducir la regla correspondiente.

$$a^2\times a^3=a.a.a.a.a.=a^5$$

esto es, *habrá que sumar los exponentes de la misma literal, para obtener el exponente del producto,* por lo cual,

$$b\times b^2=b^3$$

Respecto de las literales diferentes, como c, *que solo existen en un factor, se ponen á continuación de las otras* para indicar la multiplicación. Así, el resultado final será

$$3a^2bc\times2a^3b^2=6a^5b^3c$$

Respecto del signo del producto, notaremos que cuando los dos factores son positivos, esto es, cuando están afectados del signo $+$ el producto también será positivo: $3a\times4b=12ab$

Cuando los factores tienen signos desiguales, puede suceder que el multiplicando sea negativo, ó que lo sea el multiplicador. Si tuviéramos $-2a\times4b$; como si sumamos $-2a$ varias veces la suma tendrá el mismo signo que el sumando, inferiremos que $-2a\times4b=-8ab$. Si tuviéramos $4a\times-3a$; como el orden de los factores no altera el valor del producto, tendremos: $4a\times-3a=-3a\times4a=-12a^2$. En resumen, cuando los factores tienen signos desiguales, el producto deberá tener el signo menos.

Por último, si los dos factores están afectados del signo menos, supuesto que cuando el multiplicador es negativo el producto es de signo contrario al del multiplicando, inferiremos que cuando el multiplicando y multiplicador son negativos, el producto deberá tener el signo más. Así:

$$-4b\times-2a=8ba$$

Luego si los dos factores tienen el mismo signo, el producto tendrá el signo más, y si los factores tienen signos desiguales, el producto llevará el signo menos.

Regla.—*Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes (por las reglas de aritmética), las literales diferentes se ponen unas á continuación de otras, y en las iguales se suman sus exponentes, afectando el producto del signo más cuando los monomios tienen signos iguales, y del signo menos cuando los factores tienen signos desiguales.*

248.—Multiplicación de los polinomios.—Consideraremos cuatro casos: 1° multiplicar la suma de dos cantidades $a+b$ por una cantidad c; 2° multiplicar la suma de $a+b$ por la suma de otras dos cantidades $c+d$; 3° multiplicar la diferencia de dos cantidades $a-b$ por una cantidad c; y 4° multiplicar la diferencia de dos cantidades $(a-b)$ por la diferencia de otras dos $(c-d)$.

1° Para multiplicar $a+b$ por c, supuesto que el producto de la suma es igual á la suma de los productos, formaremos los productos de a y de b por c, y sumaremos los resultados.

$$(a+b)\times c=ac+bc$$

Aquí todos los términos del producto que provienen de la multiplicación de factores que tienen el signo más, resultan positivos.

2° Vamos á multiplicar $(a+b)$ por $(c+d)$. Tendremos que determinar primero el producto de $a+b$ por c, en seguida el de $a+b$ por d, y sumar los dos productos. Aquí hemos multiplicado todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y se observa que teniendo todos los factores signos iguales, los del producto resultan afectados del signo más.

$$\begin{array}{r} a+b \\ c+d \\ \hline ac+bc \\ +ad+bd \\ \hline ac+bc+ad+bd \end{array}$$

3° Multipliquemos $a-b$ por c. Tomando el producto ac de a por c se supone haber sumado, a, c veces; pero como no se quiere multiplicar a sino $a-b$ que es una cantidad b unidades menor que a, y como por cada unidad que disminuye el multiplicando el producto disminuye una vez el multiplicador, al producto ac debemos restarle bc para que sea el verdadero, quedando $(a-b)\times c=ac-bc$. Se vé que cada término del multiplicando se ha multiplicado por el multiplicador y que el producto de los términos de signos desiguales lleva el signo menos.

$$\begin{array}{l} a-b \\ c \\ \hline ac-bc \end{array}$$

4° Para multiplicar $a-b$ por $c-d$ concebiremos la operación divi-

$$\begin{array}{r} a-b \\ c-d \\ \hline ac-bc \\ -ad+bd \end{array}$$

dida en dos partes: en la primera, conforme á lo explicado en el caso anterior, multiplicaremos $a-b$ por c, y obtendremos el producto $ac-bc$; en seguida consideraremos que debemos multiplicar $(a-b)$ no por c, sino por $c-d$, que es una cantidad d unidades menor que c, en consecuencia el producto obtenido $ac-bc$ es mayor que el verdadero, d veces $(a-b)$, y para darle su valor exacto debemos restar del primer producto $ac-bc$ el de $(a-b)$ por d y se tendrá:

$$(a-b)\times(c-d)=(ac-bc)-(ad-bd)$$

pero para ejecutar la resta indicada, debemos cambiar los signos del sustraendo, luego, finalmente tendremos:

$$(a-b)\times(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

Este resultado obtenido conforme á un rigoroso raciocinio, nos enseña: que el producto de los binomios se forma multiplicando los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y además, que el producto de dos factores que llevan signos iguales, ambos $+$ ó ambos menos $-$, resulta afectado del signo más; y que el producto de dos factores que llevan signos desiguales, resulta afectado del signo menos.

La multiplicación de dos polinomios cualesquiera, está comprendida en la del último caso, pues a y c pueden representar la suma de todos los términos positivos de los factores, y $-b$ y $-d$ la suma de los términos negativos de cada polinomio.

La regla dada para afectar del signo más el producto de dos monomios negativos, puede deducirse del último caso. En efecto, siendo

$$(a-b)\times(c-d)=ac-bc-ad+bd$$

si consideramos el caso en que se tenga al mismo tiempo $a=0$ y $c=0$, la expresión anterior se cambia en

$$-b\times-d=+bd$$

que era lo que se quería demostrar. Tales son los fundamentos de la siguiente:

Regla.—*El producto de dos polinomios se encuentra multiplicando todos los términos de uno de los factores por cada uno de los términos del otro: cada monomio del producto se afecta del signo más cuando los que lo han producido tienen signos iguales, y del signo ménos, cuando los términos multiplicados tienen signos desiguales; los coeficientes se multiplican por las* *reglas de aritmética; las literales diferentes se ponen en el producto unas á continuación de las otras, y las que son comunes á los términos que se multiplican no se escriben mas que una vez en el producto, afectando cada literal con un exponente igual á la suma de los exponentes que dicha literal tenga en el multiplicando y multiplicador.*

Se tiene costumbre de decir que en la multiplicación hay que atender á cuatro cosas, que son: signos, coeficientes, literales y exponentes, y respecto á los signos se dice que

$$+\times+=+,\ +\times-=-,\ -\times+=-\ \text{y}\ -\times-=+$$

Esta regla, útil en la práctica, debe considerarse como una abreviación de una parte de la regla de la multiplicación de los polinomios cuyo fundamento hemos dado; pero debe tenerse presente que no pueden multiplicarse aisladamente los signos; sino que éstos indican las operaciones que deben efectuarse con las cantidades que acompañan. No es el signo — el que se multiplica por el signo —, ni aun aisladamente $-b$ por $-d$, sino la diferencia $a-b$ por $c-d$, y en este caso un escrupuloso raciocinio nos conduce á afectar el producto de $-b$ por $-d$ del signo $+$.

249.—Ejemplo de multiplicación de polinomios.—Como ejercicio pondremos los siguientes:

$$\begin{array}{l}
4a^2-16ax+3x^2\\
\quad 5a^3-2a^2x\\
\hline
20a^5-80a^4x+15a^3x^2\\
-8a^4x+32a^3x^2-6a^2x^3\\
\hline
20a^5-88a^4x+47a^3x^2-6a^2x^3
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
5a^3b^3c^2-6a^4b^2c^5+7a^8b^5c^6\\
2a^3b^3c^2+3a^4b^2c^5-6a^7b^4c^3\\
\hline
10a^6b^6c^4-12a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8\\
+15a^7b^5c^7-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}\\
-30a^{10}b^7c^5+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9\\
\hline
10a^6b^6c^4+3a^7b^5c^7+14a^{11}b^8c^8\\
-18a^8b^4c^{10}+21a^{12}b^7c^{11}-30a^{10}b^7c^5\\
+36a^{11}b^6c^8-42a^{15}b^9c^9
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{2}ab+\frac{1}{4}b^2\\
\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b\\
\hline
\frac{1}{16}a^3-\frac{1}{8}a^2b+\frac{1}{16}ab^2\\
-\frac{1}{16}a^2b+\frac{1}{8}ab^2-\frac{1}{16}b^3\\
\hline
\frac{1}{16}a^3-\frac{3}{16}a^2b+\frac{3}{16}ab^2-\frac{1}{16}b^3
\end{array}$$

En la ejecución de la multiplicación, aunque no es necesario, se suelen ordenar con respecto á una misma letra el multiplicando y el multiplicador, esto es, se ponen los términos que contienen la misma letra en el orden decreciente ó creciente de sus exponentes. Para evitar equivocaciones, se tachan los términos semejantes reducidos cuando se asientan en el producto final.

250.—Observaciones.—1.ª *El número de términos que resultan de la multiplicación, antes de hacer ninguna reducción, es igual al producto del número de términos del multiplicando por el número de términos del multiplicador.* Asi en el primer ejemplo del párrafo anterior, teniendo el multiplicando 3 términos y 2 el multiplicador, el producto tendrá $3 \times 2 = 6$ términos antes de hacer ninguna reducción. En el segundo ejemplo en que cada factor tiene 3 términos, el producto se compondrá de $3 \times 3 = 9$ términos, antes de verificar la reducción de términos semejantes. La razón de esto es que el producto se forma de la multiplicación de todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, y en consecuencia el producto tendrá tantos términos como resulte de repetir los del multiplicando el número de veces expresado por los términos del multiplicador.—Es útil verificar que esta condición está satisfecha en toda multiplicación, á fin de evitar el error á que daría lugar la omisión de la multiplicación de algún término.

2.º Cuando hay términos semejantes, el número de los del producto puede limitarse mucho, pero debe observarse que no se puede reducir *el término que proviene del producto de los términos del multiplicando y multiplicador que contienen una misma literal elevada á la mayor potencia.* Así se observa en el segundo ejemplo que el producto de los términos $7a^8b^5c^6$ por $6a^7b^4c^3$ que son los que contienen la literal a elevada á la mayor potencia no se ha podido reducir con otro término y subsiste en el producto final $42a^{15}b^9c^9$. Esta condición tiene lugar porque los términos que contienen la literal elevada á la mayor potencia, dan en el producto un término con mayor exponente que ningún otro, y por lo mismo no hay otro semejante con el que pueda reducirse.—El examen de esta condición es igualmente útil, pues descubre fácilmente alguna equivocación que puede deslizarse en la práctica de la multiplicación.

3.º *Cuando todos los términos del multiplicando son homogéneos lo mismo que los del multiplicador, el producto está compuesto de términos homogéneos, y el grado de estos es igual á la suma de las dimensiones de un término del multiplicando con las de uno del multiplicador.* Así se observa en el primer ejemplo, en el que tanto el multiplicando como el multiplicador son homogéneos, que el producto también lo es: y teniendo los términos del multiplicando 2 dimensiones y los del multiplicador 3, se ve que todos los del producto constan de 5 dimensiones, suma de $3+2$. La razón de esto es, que conforme á la regla, cada término del producto se compone de tantos factores como hay en los términos que se multiplican, luego cuando los términos del multiplicando y multiplicador son homogéneos, los del producto también lo serán, y su grado será igual á la suma de las dimensiones de los factores que los han formado. La verificación de esta condición aclara fácilmente cuando en la práctica de una multiplicación se ha cometido algún error relativo á las literales ó á los exponentes.

251.—Teoremas.—Vamos á hacer uso de la multiplicación para establecer algunos principios de frecuente aplicación, dando desde luego idea del método de demostración y de investigación que se emplea en Algebra.

I.—Si queremos averiguar á qué cosa es igual el cuadrado de la suma de dos cantidades, llamaremos una a y la otra b; multiplicaremos

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab+ba+b^2 \end{array}$$

$[a+b]$ por $[a+b]$, y obteniéndose el producto $a^2+2ab+b^2$ tendremos que $[a+b]^2=a^2+2ab+b^2$ y como a y b pueden representar cualquiera cantidad, inferimos el siguiente teorema: *el cuadrado de la suma de dos cantidades, es igual al cuadrado de la primera, más el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

Tal es el teorema que fija la relación que existe entre el cuadrado de la suma de dos cantidades y éstas.

Si se quiere hacer una aplicación bastará dar valores á las literales de la fórmula obtenida. Si las cantidades dadas son 8 y 4 y se trata de buscar el cuadrado de su suma, tendremos:

$$[a+b]^2=a^2+2ab+b^2$$

sustituyendo $$[8+4]^2=8^2+2.8\times4+4^2$$

ejecutando las operaciones indicadas, resulta:

$$12^2=64+64+16=144$$

II.—Si queremos determinar la relación que existe entre la diferencia de dos cantidades y su cuadrado, tendremos que si llamamos a y b las cantidades, su diferencia será $a-b$, y multiplicándola por sí misma se obtiene:

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

luego $$[a-b]^2=a^2-2ab+b^2$$

Se ve, pues, que *el cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el doble producto de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda.*

Sea como ejemplo determinar el cuadrado de la diferencia entre 10 y 6:

$$[a-b]^2=a^2-2ab+b^2$$
$$[10-6]^2=10^2-2.10.6+6^2=100-120+36=16$$

III.—Si tratamos de averiguar en general á qué es igual el producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, nos bastará representar las cantidades por a y por b y multiplicar $a+b$ por $a-b$ como sigue:

$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2 \end{array}$$

luego $[a+b]\,[a-b]=a^2-b^2$

De aquí inferimos que *la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia, es igual á la diferencia de sus cuadrados.* Este principio es de frecuente aplicación. Por ejemplo, si queremos determinar el producto de $[6+4]$ por $[6-4]$ tendremos:

$$[a+b]\,[a-b]=a^2-b^2$$
$$[6+4]\,[6-4]=6^2-4^2=36-16=20$$

Aquí haremos observar de nuevo que la ejecución de una operación en Algebra, conduce á una expresión que nos indica una regla para obtener el resultado deseado de una manera sencilla en todos los casos semejantes al propuesto. El resultado algebráico de una operación puesta en la forma de fórmula, es una regla que tiene la doble ventaja de la sencillez consiguiente á los signos empleados, y la de poderse aplicar á nuevas investigaciones. Así, por ejemplo, si se quiere determinar el cubo de la suma de dos cantidades, conocida la fórmula que da el cuadrado: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ bastará multiplicar este resultado por $a+b$ para obtener:

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

Ejercicios.—Hacer la multiplicación:

$$(a^2+ab+b^2)\,(a-b)$$

Resultado: a^3-b^3

Hacer la multiplicación:

$$(a^2-ab+b^2)\ (a+b)$$

R. a^3+b^3

Hacer la multiplicación:

$$(x-a)^2\,(x+a)^2$$

R. $x^4-2a^2x^2+a^4$

Hacer la multiplicación:

$$(x^2-2ax+a^2)\ (x-a)\ (x+a)$$

R. $x^4-2ax^3+2a^3x-a^4$

Hacer la operación:

$$(x+y+z)^3-3\ (x+y)\,(y+z)\,(z+x)$$

R. $x^3+y^3+z^3$

Hacer la operación:

$$(x+y+z)^2-(x-y-z)^2$$

R. $4\,x\,y+4\,x\,z$.

252.—División de los monomios.—Cuando se divide una cantidad a por otra b, el objeto de la operación es encontrar un cociente que llamaremos c, con tal valor, que multiplicándolo por b, se obtenga por producto a. Esto es, $a=bc$. Si hay una resta r, se debe tener $a=bc+r$ con la condición de que sea $r<b$.

En la división de los monomios hay que atender, como en la multiplicación, á los *signos*, *coeficientes*, *literales y exponentes*, y las reglas correspondientes las deduciremos del objeto de la división, que es encontrar una cantidad que multiplicada por el divisor, dé por producto el dividendo.

Respecto de los *signos*, hemos demostrado en la multiplicación que el producto de cantidades afectadas de signos iguales debe llevar el signo $+$, y que el producto de cantidades afectadas de signos desiguales lleva el signo $-$. En consecuencia, cuando el dividendo, que es el producto del divisor por el cociente, tiene el signo $+$, el cociente llevará signo igual al del divisor; y cuando el dividendo tiene el signo $-$, el cociente deberá estar afectado de signo contrario al del divisor. De esto resulta, que *cuando se divide una cantidad por otra, si ambas tienen signos iguales, el cociente tendrá el signo* $+$; *y si las cantidades que se dividen tienen signos desiguales, el cociente llevará el signo* $-$. Es preciso tener esta regla como un hecho de cálculo, consecuencia necesaria para satisfacer la condición de que el producto del cociente por el divisor sea el dividendo, y las reglas comunes de que $+ \div +$ da $+$, de que $+ \div -$ da $-$, de que $- \div +$ da $-$, y de que $- \div -$ da $+$, se deben considerar como una abreviación del resultado á que nos conduciría el raciocinio en cada caso; pero debe tenerse presente que no se puede dividir aisladamente un signo por otro.

Respecto de *los coeficientes se dividen por las reglas de la Aritmética* pudiendo ser el coeficiente del cociente un número entero, quebrado ó fraccionario, según sea el caso.

En cuanto á las *literales,* la regla general es que el cociente es un quebrado cuyo numerador se forma con las del dividendo y el denominador con las literales del divisor, supuesto que el producto de un quebrado por su denominador es su numerador (149). *Cuando hay literales iguales con los mismos exponentes en el dividendo y divisor, éstas desaparecen en el cociente,* porque toda cantidad dividida por sí misma, da por cociente la unidad.

Por último, *cuando una misma literal está afectada de diferentes exponentes, el cociente será la literal con un exponente igual al exponente del dividendo menos el del divisor.* La razón de esta regla es, que supuesto que para multiplicar dos literales iguales se suman sus exponentes, para dividirlas será necesario restarlos (246). Cuando por ejemplo, se trata de dividir a^5 por a^3, se busca una cantidad que multiplicada por a^3, produzca a^5, y supuesto que este cociente será la misma literal a afectada de un exponente que sumado con 3 dé 5, bastará restar el exponente 3 del divisor de el del dividendo 5 para hallar el del cociente, y se tiene: $a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$.

Sea como ejemplos:

$$\frac{15a^5b^2c}{3a^2b} = 5a^3bc \qquad \frac{5ch^2d}{2ch^3d^4} = \frac{5}{2hd^3} \qquad \frac{6a^2b^3c}{2a^2bd} = \frac{3b^2c}{d}$$

Se ve, pues, que *para que el cociente sea de la forma entera es necesario:* 1°, *que el coeficiente del dividendo sea divisible exactamente por el del divisor;* 2°, *que no haya en el divisor ninguna literal diferente de las del dividendo; y* 3°, *que cuando en el dividendo y en el divisor haya la misma literal, el exponente de la del dividendo ha de ser mayor que el de la del divisor.*

Cuando se tiene, por ejemplo, $\frac{3a^2bc^3}{6a^2b^4c} = \frac{c^2}{2b^3}$ el cálculo algebráico no puede llevarse más adelante, y quedará por dividirse c^2 por $2b^3$ cuando se conozcan los valores numéricos de estas cantidades.

253.—DIVISIÓN DE LOS POLINOMIOS.—Si se trata de dividir

$$4a^6+20ab^5-25a^2b^4-4b^6 \text{ por } 2b^3+2a^3-5ab^2$$

sabemos que el cociente multiplicado por el divisor, debe producir el dividendo y en consecuencia, si conociéramos uno de los términos del producto, que hubiese resultado de multiplicar uno de los términos del divisor por uno del cociente, bastaría ejecutar la división de esos monomios para obtener un término del cociente; pero como, según se ha visto, (250) nunca se reduce el término que proviene del producto de los del multiplicando y multiplicador que contienen una misma literal elevada á la mayor potencia, escogiendo el término $4a^6$ del dividendo en el que a está elevada á la mayor potencia, y dividiéndolo por $2a^3$, término del divisor en el que también a está elevada á la mayor potencia, obtendremos un término del cociente en el que a estará afectada del mayor exponente.

Como $\frac{4a^6}{2a^3}=2a^3$ éste será el primer término del cociente por el cual multiplicaremos todo el divisor, y este producto parcial procedente del término hallado del cociente, lo restaremos del dividendo, *cambiando todos los signos* (246) *y haciendo las reducciones* que sean posibles. La resta que quede será el producto del divisor por los demás términos del cociente, y por esto deberemos proceder con la resta lo mismo que antes, para obtener el 2.º término del cociente, dividiendo el término en que a tenga mayor exponente en la resta por el correspondiente del divisor conforme á las reglas dadas para la división de los monomios. Con el objeto de evitar la dificultad consiguiente á tener que entresacar de todos los términos del dividendo, de las restas y del divisor aquel en que una misma literal tiene el mayor exponente, *se ordenan previamente los términos tanto del dividendo como del divisor, con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal.* La operación se ejecuta como sigue:

$$\begin{array}{ll|l}
 & 4a^6-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & 2a^3-5ab^2+2b^3 \\
 & -4a^6+10a^4b^2-4a^3b^3 & \overline{2a^3+5ab^2-2b^3} \\
\hline
1^a \text{ Resta.} & +10a^4b^2-4a^3b^3-25a^2b^4+20ab^5-4b^6 & \\
 & -10a^4b^2+25a^2b^4-10ab^5 & \\
\hline
2^a \text{ Resta.} & -4a^3b^3+10ab^5-4b^6 & \\
 & +4a^3b^3-10ab^5+4b^6 & \\
\hline
3^a \text{ Resta.} & 0 &
\end{array}$$

Después de haber ordenado los términos del dividendo respecto de las potencias de a lo mismo que los del divisor, se busca el cociente de $4a^6$ dividido por $2a^3$, y una vez hallado el término $2a^3$ del cociente, se multiplican por él todos los términos del divisor, teniendo cuidado de cambiar los signos de cada producto á fin de restar este producto parcial del dividendo. Así, se dice para multiplicar $2a^3$ por $2a^3$, como $+$ por $+$ da $+$, para restar se pone $-$ al producto $4a^6$; en seguida $+$ por $-$ da $-$, pero para restar se pone $+$ al producto $10a^4b^2$, por igual razón se afecta del signo $-$ el producto $4a^3b^3$. Una vez formado el producto del divisor por el primer término $2a^3$ del cociente y cambiados los signos para restar, se efectúa la reducción de términos semejantes y se determina la primera resta. En seguida, conforme á las reglas dadas para la división de los monomios, se determina el cociente del término $+10a^4b^2$ de la resta en el que a lleva el exponente más alto, por $2a^3$ primer término del divisor; por el cociente $+5ab^2$ se multiplica el divisor, y restando el producto de la primera resta se obtiene la segunda. Por último, dividiendo $-4a^3b^3$ por $2a^3$, se determina el término $-2b^3$ del cociente; multiplicando por él el divisor y restando de la segunda resta el producto, se obtiene 0 por resta, lo que indica que la división es exacta siendo el cociente $2a^3+5ab^2-2b^3$. Si se multiplica esta expresión por el divisor $2a^3-5ab^2+2b^3$, se obtiene como producto definitivo el dividendo y como productos parciales, antes de ejecutar ninguna reducción, los productos que ha ido dando cada término del cociente y que sucesivamente se han ido restando del dividendo.

De todo lo expuesto se deduce la siguiente:

Regla para dividir dos polinomios.—*Se ordenarán los términos del dividendo y los del divisor con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal, en seguida, dividiendo el primer término del dividendo por el primero del divisor, conforme á las reglas dadas relativas á signos, coeficientes, literales y exponentes en la división de los monomios, se obtendrá el primer término del cociente: se multiplicarán todos los términos del divisor, por el del cociente, y se restará el producto del dividendo, para lo cual se cambiarán los signos de cada producto y en seguida se ejecutará la reducción de términos semejantes, para determinar la primera resta: se procederá con esta resta lo mismo que con el dividendo, y la operación se continuará hasta que se obtenga cero por resta, ó hasta que el primer término de la resta después de haberla ordenado, no sea divisible por el primero del divisor, caso en que el cociente no podrá ser de la forma entera.*

Debemos observar que la ordenación prévia con respecto á las potencias de una literal, puede hacerse escogiendo cualquiera letra, pero es preciso que sea la misma en el dividendo y en el divisor, y puede hacerse esta ordenación igualmente en el orden creciente de las potencias. Esta ordenación en aritmética es inútil, porque las cantidades numéricas están ordenadas con respecto á las potencias decrecientes de 10, en virtud de las convenciones del sistema de numeración.

254.—Ejemplos:—Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos de la división en álgebra.

Primer ejemplo:

$$\begin{array}{ll|l}
 & a^5-5a^4b+5a^3b^2+3a^2b^3 & a^3-3a^2b \\
 & -a^5+3a^4b & \overline{a^2-2ab-b^2} \quad \text{Cociente.} \\
\hline
1^a \text{ Resta.} & -2a^4b+5a^3b^2+3a^2b^3 & \\
 & +2a^4b-6a^3b^2 & \\
\hline
2^a \text{ Resta.} & -a^3b^2+3a^2b^3 & \\
 & +a^3b^2-3a^2b^3 & \\
\hline
3^a \text{ Resta.} & 0 &
\end{array}$$

Segundo ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
10a^4-48a^3b+51a^2b^2+4ab^3-15b^4+3b^5+c & -5a^2+4ab+3b^2 \\
-10a^4+8a^3b+6a^2b^2 & \overline{-2a^2+8ab-5b^2} \\
\hline
-40a^3b+57a^2b^2+4ab^3-15b^4+3b^5+c & \\
+40a^3b-32a^2b^2-24ab^3 & \\
\hline
+25a^2b^2-20ab^3-15b^4+3b^5+c & \\
-25a^2b^2+20ab^3+15b^4 & \\
\hline
\text{Resta} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad +3b^5+c &
\end{array}$$

Esta división no es exacta.

Tercer ejemplo:

$$\begin{array}{l|l}
a^3-b^3 & a-b \\
-a^3+a^2b & \overline{a^2+ab+b^2} \\
\hline
+a^2b-b^3 & \\
-a^2b+ab^2 & \\
\hline
+ab^2-b^3 & \\
-ab^2+b^3 & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

255.—Observaciones sobre la división.—En el número 253 explicamos en qué casos la división de los monomios puede dar un cociente de la forma entera, y ahora observaremos respecto de los polinomios: 1.º que para que el cociente sea de la forma entera es necesario que el término del dividendo que encierra una literal elevada á la mayor potencia, sea divisible por el término del divisor en que la misma literal esté elevada á la mayor potencia.

2.º Que cuando el divisor contiene alguna literal que no entra en el dividendo, la división no puede dar un cociente de forma entera.

3.º Que otro tanto sucede cuando hay que partir un monomio por un polinomio.

4.º Que un polinomio solo se puede dividir exactamente por un monomio cuando todos y cada uno de los términos del polinomio son divisibles por el divisor.

5.º Que cuando la literal respecto de la cual se han ordenado los polinomios tiene en el primer término del dividendo ó de alguna de las restas un exponente menor que el primero del divisor, el cociente no puede ser de la forma entera.

6.º Que cuando el dividendo y el divisor sean homogéneos, lo serán igualmente las restas y el cociente. Además, el grado de los términos del cociente será igual al del dividendo menos el del divisor.

7.º Que cuando el dividendo es homogéneo y el divisor no lo es, no podrá obtenerse un cociente de la forma entera.

256.—Teoremas de la división.—Nos serviremos de la división para demostrar algunos teoremas.

I. *Toda cantidad elevada á cero es igual á la unidad.* Si dividimos, por ejemplo, a^m por a^m como toda cantidad dividida por sí misma da por cociente la unidad, tendremos $\frac{a^m}{a^m}=1$. Por otra parte se ha visto que para dividir literales iguales deben restarse sus exponentes, por lo cual, $\frac{a^m}{a^m}=a^0$; luego $a^0=1$. Se ve, pues, que a^0 es el símbolo de la unidad, por ser tanto a^0 como 1 resultados que proceden de dividir a^m entre a^m.

II. *Toda cantidad cuyo exponente es negativo es igual á un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador es la misma cantidad tomada con exponente positivo.*

Vamos á demostrar que

$$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$

Como el valor representado por a^{-p} no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, tendremos que:

$$a^{-p}=\frac{a^{-p}\times a^{p}}{a^{p}}=\frac{a^{0}}{a^{p}}=\frac{1}{a^{p}}$$

luego

$$a^{-p}=\frac{1}{a^{p}}$$

que es lo que se quería demostrar.

III. Si dividimos a por $1-x$ el cociente da una serie de términos que no tiene fin.

$$\begin{array}{l|l}
a & 1-x \\
-a+ax & \overline{a+ax+ax^2} \\
\hline
+ax & \\
-ax+ax^2 & \\
\hline
+ax^2 & \\
-ax^2+ax^3 & \\
\hline
\end{array}$$

Resta $+ax^3$

En consecuencia, $\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+\ldots\ldots$ pero debe tenerse presente que la división no es exacta y que para completar el valor del cociente es necesario agregarle la resta que haya quedado, hasta donde se haya llevado la división, partida por el divisor. Exactamente se tiene

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+\frac{ax^3}{1-x}=a\left(1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}\right)$$

Si se tiene, por ejemplo, $a=3$, $x=\frac{1}{2}$, sustituyendo tendremos:

$$\frac{3}{1-\frac{1}{2}}=3\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}}\right)=6$$

Cuando x tiene un valor mayor que la unidad, $\frac{a}{1-x}$ es una cantidad negativa y á primera vista parece extraño que la suma de los términos del 2º miembro de la ecuación pueda ser una cantidad negativa. Esto consiste en que en el último término, la resta partida por el divisor, es una cantidad negativa mayor que la suma de todos los términos que la preceden.

Si en la ecuación $\frac{a}{1-x}=a\left(1+x+x^2+\frac{x^3}{1-x}\right)$ hacemos $a=4$, $x=3$, tendremos:

$$\frac{4}{1-3}=-2=4\left(1+3+9+\frac{27}{-2}\right)=4\left(13-\frac{27}{2}\right)=4\left(\frac{26-27}{2}\right)=-2$$

El resultado obtenido en la división de a por $1-x$ puede servirnos para determinar el valor de una fracción decimal periódica simple.

Sea la fracción periódica simple 0'(27) la que se trata de convertir en quebrado común por medio de la expresión:

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots\ldots\ldots(A)$$

La fracción periódica 0'(27) se expresa por la ecuación:

$$0'(27)=0'27\ 27\ 27\ldots\ldots\ldots\ldots$$

descomponiéndola en los sumandos de que consta, da:

$$0'(27)=0'27+0'0027+0'000027+\ldots\ldots\ldots\ ;$$

expresando los factores que producen los sumandos segundo, tercero, etc:

$$0'(27)=0'27+0'27\times0'01+0'27\times(0'01)^2+\ldots\ldots.(B)$$

Comparando las ecuaciones (A) y (B) se perciben las siguientes semejanzas de sus segundos miembros: 1.ª constan de un número indefinido de términos; 2.ª estos términos son todos positivos; 3.ª en la ecuación (A) el segundo término es igual al primero, a, multiplicado por la 1.ª potencia de x; el tercer término es igual al primero, a, multiplicado por la 2.ª potencia de x, y todos los demás términos son el producto del factor constante, a, por las potencias sucesivamente crecientes de x; mientras que en la ecuación (B) el segundo término es igual al primero, 0'27, multiplicado por la 1.ª potencia de 0'01; el tercer término es igual al primero, 0'27, multiplicado por la 2.ª potencia de 0'01; y todos los demás términos son el producto de la cantidad constante, 0'27, por las potencias sucesivamente crecientes de 0'01. La semejanza de los segundos miembros de las ecuaciones (A) y (B) se patentiza completamente haciendo:

$$a=0'27 \text{ y } x=0'01$$

y sustituyendo estos valores en la ecuación (A), con lo que se transforma en

$$\frac{0'27}{1-0'01}=0'27+0'27\times0'01+0'27\times(0'01)^2+\ldots\ldots\ldots(C)$$

Ahora bien, como los segundos miembros de las ecuaciones (B) y (C) son iguales, los primeros también lo serán, y por tanto

$$0'(27)=\frac{0'27}{1-0'01}$$

ejecutando la resta del denominador

$$0'(27)=\frac{0'27}{0'99}$$

y multiplicando por 100 los términos del quebrado, se obtiene definitivamente:

$$0'(27)=\frac{27}{99}$$

resultado igual al obtenido en aritmética. (174 tercer caso.)

A fin de generalizar nuestra demostración, representaremos por $0'(p)$ una fracción periódica simple, en la que p es el periodo compuesto de n cifras, y la compararemos con la expresión:

$$\frac{a}{1-x}=a+ax+ax^2+ax^3+\ldots\ldots\ldots\ldots(A)$$

La fracción periódica $0'(p)$ se expresa por la ecuación:

$$0'(p)=0'ppp\ldots\ldots$$

descomponiéndola en los sumandos de que consta:

$$0'(p)=0'p+0'00\ldots p+0'000\ldots.p.+\ldots..$$

El período p en el 1.^{er} sumando no estará precedido de ningún cero, en el 2.º estará precedido de n ceros, en el 3.º de 2 n ceros, y así en adelante.

Descomponiendo los sumandos segundo, tercero, etc., en sus factores, tendremos:

$$0'(p)=0'p+0'p\times(0'00\ldots1)+0'p\times(0'00\ldots.1)^2+\ldots..(D)$$

debiendo constar el factor (0'00...1) de n cifras decimales.

Para patentizar la semejanza de los segundos miembros de las ecuaciones (A) y (D) haremos:

$$a=0'p \text{ y } x=(0'00\ldots1)$$

y sustituiremos estos valores en la expresión (A), con lo que se transforma en:

$$\frac{0'p}{1-0'00\ldots1}=0'p+0'p\times(0'00\ldots1)+0'p\times(0'00\ldots1)^2+\ldots.(E)$$

Como los segundos miembros de las ecuaciones (D) y (E) son iguales, se infiere que los primeros también lo serán, y por tanto:

$$0'(p)=\frac{0'p}{1-0'00\ldots1}=\frac{0'p}{0'99\ldots.}$$

debiendo constar el denominador de n nueves.

Multiplicando por 10^n los dos términos del quebrado, se obtiene finalmente:

$$0'(p)=\frac{p}{999\ldots}$$

que es lo que teníamos que demostrar.

IV. Para determinar el cociente de $\frac{a^m-b^m}{a-b}$

dividiremos sucesivamente por $a-b$, primero a^2-b^2, en seguida a^3-b^3 y por último, a^4-b^4. Ejecutando estas divisiones se obtiene:

$$\frac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$$

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$$

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

Juzgando por analogía podríamos inferir: 1°, que por grande que sea el exponente de a y de b la división será exacta; 2°, que el número de términos del cociente está indicado por las unidades de ese exponente; 3°, que el exponente de a en el primer término del cociente es una unidad menor que el del dividendo, y que va decreciendo una unidad de un término al siguiente; 4°, que no existe b en el primer término del cociente; y 5°, que en el segundo tiene la unidad por exponente y éste va creciendo una unidad de un término á otro hasta encontrarse b solo en el último término elevado á una potencia una unidad menor que la que tiene en el dividendo. Como la analogía no siempre es buen fundamento de una demostración, vamos á ejecutar la división de $\frac{a^m-b^m}{a-b}$.

$$\begin{array}{ll|l} & a^m-b^m & a-b \\ & -a^m+a^{m-1}b & \overline{a^{m-1}} \\ \hline \text{1.ª Resta} & +a^{m-1}b-b^m & \\ \text{ó bien} & b\,(a^{m-1}-b^{m-1}) & \end{array}$$

Dividiendo a^m por a se tiene por cociente a^{m-1}. Restando el producto de $a-b$ por a^{m-1} del dividendo se tiene por primera resta $a^{m-1}b-b^m$, expresión que se puede poner bajo la forma $b(a^{m-1}-b^{m-1})$.

De esto resulta que si $a^{m-1}-b^{m-1}$ es divisible exactamente por $a-b$, lo será también a^m-b^m [104]. Esto es, si la diferencia de las potencias semejantes de cierto grado de dos cantidades es divisible exactamente por la diferencia de las mismas cantidades, la diferencia de las potencias de un grado una unidad mayor será igualmente divisible.

Ahora bien, como $\frac{a^2-b^2}{a-b}$ da el cociente exacto $a+b$, $\frac{a^3-b^3}{a-b}$ conforme al cociente y resta obtenida al dividir a^m-b^m por $a-b$, dará también un cociente exacto, igual á $a^2+b\frac{a^2-b^2}{a-b}$,

$$\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+b\,(a+b)=a^2+ab+b^2$$

Igualmente

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+b\frac{a^3-b^3}{a-b}=a^3+b\,(a^2+ab+b^2)$$

ó

$$\frac{a^4-b^4}{a-b}=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

y en general

$$\frac{a^m-b^m}{a-b}=a^{m-1}+a^{m-2}b+a^{m-3}b^2+\ldots+ab^{m-2}+b^{m-1}$$

Este resultado puede verificarse multiplicando el cociente por $a-b$, y se verá que todos los términos ó productos parciales se destruyen con excepción de a^m y $-b^m$.

Ejercicios.—Hacer la división:

$$\frac{10a^5b-21a^4b^2-56ab^5-3a^2b^4-10a^3b^3}{8b^3-3ab^2+5a^2b}$$

Resultado: $2a^3-3a^2b-7ab^2$

Hacer la división:

$$\frac{32a^5-b^5}{2a-b}$$

R. $16a^4+8a^3b+4a^2b^2+2ab^3+b^4$

Hacer la división:

$$\frac{16x^4-81y^4}{2x-3y}$$

R. $8x^3+12x^2y+18xy^2+27y^3$

257.—Sacar una cantidad como factor común.—Cuando en todos ó en varios términos de un polinomio entra una cantidad como factor, puede ejecutarse en la expresión una transformación que se llama *sacar una cantidad como factor común,* poniendo ésta multiplicada por la suma ó diferencia de las cantidades que la multiplican en cada término. Por ejemplo, si se tiene:

$$4ab^2+2ac-3abc$$

entrando en todos los términos a como factor, esta expresión será igual á

$$a\,(4b^2+2c-3bc)$$

fundándose en que el producto de a por la suma ó diferencia de las cantidades que están dentro del paréntesis es igual á la suma ó diferencia de los productos de la primera expresión.

Ocurren dos casos en esta transformación: 1.°, cuando se quiere determinar cuál es el mayor factor común á varios términos; y 2°, cuando se quiere sacar como factor común en un polinomio una cantidad dada.

Las reglas para resolver estos casos son:

1º *Para averiguar cuál es el factor común de varios términos, se determinará el máximo común divisor de los coeficientes, y el número que resulte se multiplicará por las literales que sean comunes á todos los términos, afectando cada una de ellas del menor de sus exponentes. En seguida se multiplicará este factor por el cociente que resulte de dividir por él cada uno de los términos.*

2° *Para sacar una cantidad dada como factor común en un polinomio, se dividirá cada término del polinomio por la cantidad que se quiere sacar como factor común, y la suma ó diferencia de los cocientes que resulten se multiplicará por el repetido factor.*

Por vía de ejercicio de esta operación, que es de uso frecuente y de gran utilidad en Algebra, pondremos los siguientes ejemplos:

1.° $6a^3xb^3-9a^3b^4+12a^3b^3c^2x=3a^3b^3\,(2x-3b+4c^2x)$.

2.° En la expresión $2a^3m^2n-6rsa^2+8a^3m^2n$ sacar como factor común á $2a^2m^2n$. Por la regla para el 2.° caso se tiene:

$$2a^3m^2n-6rsa^2+8a^3m^2n=2a^2m^2n\left(a-\frac{3rs}{m^2n}+4a\right)$$

3.° Hay veces en las que se pide sacar como factor común una cantidad que no forma parte de algunos de los términos de un polinomio ó de ninguno; en este caso lo que se hace es multiplicar y dividir préviamente por la cantidad que se quiere sacar como factor común los términos que no la contienen. Por ejemplo, se quiere sacar como factor común á a en la expresión:

$$c+a+b$$

tendremos: $c+a+b=\frac{ac}{a}+a+\frac{ab}{a}=a\left(\frac{c}{a}+1+\frac{b}{a}\right)$

Se quiere sacar como factor común á $3a^2b$ en el polinomio

$$2bc-4a^2c+2b^2d$$

multiplicaremos y dividiremos cada término por cantidades adecuadas para lograr que el numerador de cada término contenga como factor á $3a^2b$. Así:

$$2bc-4a^2c+2b^2d=\frac{2bc.3a^2}{3a^2}-\frac{4a^2c.3b}{3b}+\frac{2b^2d.3a^2}{3a^2}=3a^2b\left(\frac{2c}{3a^2}-\frac{4c}{3b}+\frac{2bd}{3a^2}\right)$$

Todas estas transformaciones se comprueban ejecutando las multiplicaciones indicadas.

FRACCIONES ALGEBRAICAS.

258.—Definiciones.—Las fracciones en Algebra se consideran de las mismas maneras que en Aritmética: 1.ª *representando el numerador el número de partes de la unidad, y el denominador las partes en que está dividida la unidad;* 2.ª *como el cociente del numerador dividido por el denominador.* Este segundo modo de considerar los quebrados es más común en Algebra, y una fracción $\frac{a}{b}$ se lee a partido por b.

Cuando ejecutando una división algebráica se obtiene una resta que no puede dividirse por el divisor, el cociente es de la forma mixta ó fraccionaria, y la última parte se compone de un quebrado cuyo numerador es la resta y el denominador el divisor.

El valor de una fracción en Algebra, depende de la relación que hay entre el del numerador y el del denominador, lo mismo que en Aritmética.

259.—Operaciones con las fracciones algebráicas.—Teniendo las fracciones en Algebra la misma significación y valor relativo que en Aritmética, la adición, sustracción, multiplicación y división de las fracciones se ejecutan lo mismo que en Aritmética, teniendo cuidado de practicar las operaciones prescritas conforme á las reglas dadas en Algebra.

1.º Para hacer un quebrado cierto número de veces mayor, se multiplicará su numerador ó se dividirá su denominador; y para hacerlo menor, se dividirá su numerador ó se multiplicará su denominador. Así:

$$\frac{a}{b}\times d=\frac{ad}{b}\quad \frac{a}{b^3}\times b^2=\frac{a}{b}\quad \frac{a^4}{b^2}\div a=\frac{a^3}{b^2}\quad \frac{a}{b}\div d=\frac{a}{bd}$$

2.° El valor de un quebrado no se altera cuando se multiplican ó se dividen sus dos términos por una misma cantidad.

$$\frac{a}{b}=\frac{a(d+c)^2}{b(d+c)^2}\quad \frac{a}{b}=\frac{ax^3}{bx^3}\quad \frac{a^2-b^2}{a^2+2ab+b^2}=\frac{(a+b)(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

Cuando todos los términos del numerador y del denominador de un quebrado tienen un factor común se puede simplificar suprimiéndolo.

$$\frac{8a^4-16a^3b+8a^2b^2}{8a^3-8a^2b}=\frac{8a^2(a^2-2ab+b^2)}{8a^2(a-b)}=\frac{(a-b)^2}{a-b}=a-b$$

3.° Para incorporar un entero con un quebrado, se multiplica el entero por el denominador, se agrega al producto el numerador y á la suma se le da por denominador el del quebrado. Para sacar los enteros de un quebrado se divide el numerador por el denominador. Por ejemplo:

$$d+\frac{a}{b}=\frac{bd+a}{b}\qquad d-\frac{a}{b}=\frac{bd-a}{b}$$

$$\frac{3a^2-2ab+2bc}{a-b}=3a+b+\frac{2bc+b^2}{a-b}$$

4.° Para reducir los quebrados á un común denominador, se multiplican los dos términos de cada quebrado por el producto de los demás denominadores; ó bien, haciendo uso del menor múltiplo común á los denominadores, se multiplicarán los dos términos de cada quebrado por el cociente que resulta de dividir el múltiplo común por su denominador. Este segundo método es de más frecuente aplicación en Algebra y de más fácil ejecución que en Aritmética. *Para encontrar el menor múltiplo común, basta determinar el de los coeficientes, y poner á continuación las diferentes literales que forman los denominadores, afectando cada una del mayor de sus exponentes.*

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{df}=\frac{ad^2f}{bd^2f}+\frac{cbdf}{bd^2f}+\frac{bde}{bd^2f}$$

Valiéndonos del menor múltiplo común reduciremos á un común denominador los quebrados:

$$\frac{a}{2be}+\frac{h}{3b^2d}+\frac{e}{4b^3d^2}=\frac{6ab^2d^2}{12b^3d^2e}+\frac{4hbde}{12b^3d^2e}+\frac{3e^2}{12b^3d^2e}$$

El menor múltiplo de los coeficientes es 12, y poniendo á continuación las literales diferentes *bde* afectada cada una del mayor exponente determinaremos el menor múltiplo $12b^3d^2e$; dividiendo este menor múltiplo por el denominador del primer quebrado, multiplicaremos sus dos términos por el cociente $6b^2d^2$. Los términos del segundo quebrado se multiplicarán por $4bde$; y los del tercero se multiplicarán por $3e$.

La suma, resta, multiplicación y división de las fracciones, se ejecutan con las expresiones algebraicas conforme á las reglas de Aritmética.

Para ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

1º $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{h}{g}=\frac{adgb+cg+bdh}{bdg}$$

2º $$\left(a+\frac{b}{d}\right)+\left(c+\frac{h}{g}\right)=\frac{ad+b}{d}+\frac{cg+h}{g}=\frac{adg+bg+cdg+dh}{dg}$$

3º $$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd},\quad \frac{a}{m}-1=\frac{a-m}{m}.$$

4º $$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b},\quad \frac{a}{mb}\times b=\frac{a}{m},\quad \frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

$$\left(a+\frac{b}{c}\right)\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{(ac+b)\,(mq+p)}{cq}$$

5º $$\frac{a}{b}\div c=\frac{a}{bc},\quad \frac{ma}{b}\div m=\frac{a}{b},\quad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$$

$$\left(a-\frac{b}{c}\right)\div\left(m+\frac{p}{q}\right)=\frac{ac-b}{c}\div\frac{mq+p}{q}=\frac{(ac-b)q}{(mq+p)c}$$

6º $$\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}=\frac{(a+b)\,(a-b)}{(a+b)^2}=\frac{a-b}{a+b}$$

7º $$\frac{a^4-b^4}{a^3-b^3}=\frac{\dfrac{a^4-b^4}{a-b}}{\dfrac{a^3-b^3}{a-b}}=\frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+ab+b^2}=a+\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}$$

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

260.—*Se llama igualdad la expresión algebraica que indica que dos cantidades tienen el mismo valor.* Las igualdades se indican poniendo el signo $=$ entre las cantidades que tienen el mismo valor. Por ejemplo $3a+bc=d$ es una igualdad; las cantidades $3a+bc$ que están á la izquierda del signo $=$ forman el *primer miembro*, y las que están á la derecha, forman el *segundo miembro* de la igualdad.

Ecuación es la expresión de la igualdad del valor de dos cantidades, cuyo modo de formación generalmente es diferente. Comunmente se aplica el nombre de ecuación á una igualdad que contiene incógnitas, y cantidades conocidas. En Algebra hay costumbre de representar los datos de un problema con las primeras letras del alfabeto, y las incógnitas con las últimas; por ejemplo:

$$2a+x=24 \qquad x+y=\frac{a^2}{b}$$

son ecuaciones, debiendo observarse que las igualdades no subsisten ó se verifican sino en el caso de tener las incógnitas x, y, valores adecuados á las condiciones que han servido para establecer cada ecuación.

Se llama *identidad, la igualdad que se verifica por sí misma.* Por ejemplo:

$$2x+3+2=5+2x.$$

Hay identidades expresadas exactamente por las mismas cantidades; en otras un miembro es el resultado de las operaciones indicadas en el otro de la igualdad.

Toda ecuación debe convertirse en identidad cuando se reemplazan las incógnitas por sus valores, esto es, cuando se hace la verificación de la ecuación.

Se dice que las ecuaciones son *numéricas* cuando sólo las incógnitas están representadas por letras.

Cuando uno de los miembros de una ecuación no contiene más que la incógnita y el otro expresa su modo de formación por medio de las cantidades conocidas, la expresión toma el nombre de *fórmula.*

Si, por ejemplo, el resultado de un problema es

$$x=\frac{(a+b)^n}{2}$$

esta expresión será una fórmula, porque en ella constan las relaciones abstractas que ligan entre sí á las cantidades del problema, y expresa el modo de generación de la incógnita. (241).

Cuando los valores de dos cantidades están ligados entre sí de manera que la alteración de una produce una variación en la otra cantidad, se dice que una cantidad es *función* de la otra. Por ejemplo: supuesto que alterándose el dividendo se altera el cociente, diremos que el cociente es función del dividendo, y viceversa. La superficie de un círculo s, variando con el radio r, es una función de esta línea, lo cual se indica $s=f(r)$. Del mismo modo el espacio que recorre un cuerpo al caer, es una función del tiempo, y recíprocamente el tiempo es una función del espacio. Ordinariamente solo una de las cantidades se considera como variable independiente, y la otra cantidad, cuyas variaciones dependen de las de la primera, es la función propiamente dicha. *Las funciones son algebráicas* cuando se pueden expresar por las operaciones cuyos signos son $+$, $-$, $\times$, $\div$, los exponentes y los radicales; y cuando hay que emplear otras operaciones, se llaman *funciones trascendentes*. El logaritmo de un número es una función trascendente de él; las funciones circulares, esto es, aquellas en que entran los valores de las líneas del círculo, son igualmente trascendentes

Según es el número de incógnitas que contiene una ecuación, se dice que es ecuación de una, de dos, ó de más incógnitas. Por ejemplo: $ax+c-2x=3x-d$ es ecuación de una incógnita porque sólo contiene una cantidad desconocida, x. La ecuación $ax+by+cz=3d-a$, es una ecuación de tres incógnitas.

Las ecuaciones se clasifican también por su *grado* y se llaman ecuaciones de 1.º, 2.º, 3^er^ grado, etc. *El grado de una ecuación se estima por el grado mayor de la incógnita en la ecuación.* Cuando hay varias incógnitas, el grado de la ecuación es la mayor suma de los exponentes de las incógnitas en *un mismo término* de la ecuación. Así, $3x+b=x-\frac{2x}{c}$ es una ecuación de primer grado. La ecuación $ax+bx^2+cy=d$ es de 2.º grado; $x^3y-y^2=2ab$ es una ecuación de 4.º grado.

261.—Ecuaciones. Fundamentos para su resolución.—Para resolver un problema algebráico es indispensable, ante todo, expresar por una ecuación las condiciones que ligan las cantidades conocidas con las desconocidas; una vez hecho esto, es necesario aislar la incógnita de las cantidades unidas á ella á fin de tenerla en un sólo miembro de la ecuación y en el otro su valor, y por último, debe comprobarse el resultado obtenido.

Por ejemplo: sabiendo que la edad de una persona es 4 veces la de su hijo, y que la suma de las dos edades forma 45 años, se quiere determinar cuál es la edad de cada uno.

Si suponemos que la edad del hijo sea x años, la del padre sería $4x$; y supuesto que la suma de las dos edades ha de formar 45 años, tendremos que

$$x+4x=45$$

Tal es la ecuación que en este problema expresa la liga ó relación que existe entre los datos y la incógnita. Esta traducción de las condiciones del problema, digámoslo así, al lenguaje algebráico, forma la primera parte de la resolución del problema; la 2.ª consiste en ejecutar las operaciones indicadas y conseguir que la incógnita quede sola en un miembro de la ecuación. Con tal objeto, ejecutando las operaciones indicadas tendremos:

$$5x=45$$

Aquí vemos que 45 es el producto de la edad x del hijo por 5, y como si el producto de dos cantidades se parte por una de ellas, el cociente será el otro factor, tendremos:

$$x=\frac{45}{5}=9$$

A esto se llama despejar la incógnita.

Por último: se debe comprobar este resultado. Si la edad del hijo es 9 años, la del padre, que es cuatro veces mayor, será 36 años, y como $9+36$ da 45, queda comprobado que el resultado obtenido satisface las condiciones del problema.

En la resolución de un problema se deben, pues, distinguir tres partes: 1.ª *plantearlo*, esto es, formar una ecuación en la que se indiquen las condiciones que en el problema ligan las cantidades conocidas con las desconocidas; 2.ª *resolver la ecuación*, operación que tiene por objeto determinar el valor de la incógnita: y 3.ª *verificar* el valor obtenido para la incógnita, comprobando que la cantidad encontrada satisface las condiciones del problema.

El Algebra solo se ocupa de los problemas que dan lugar á ecuaciones formadas con operaciones conocidas.

El poco número de operaciones elementales de las matemáticas es la causa de la dificultad que se experimenta para expresar las condiciones de un problema con los signos de las operaciones y símbolos del Algebra, esto es, para plantearlo, y con el objeto de conseguir esto, ante todo, es necesario comprender la cuestión, familiarizarse con la escritura del Algebra, y adquirir á fuerza de práctica, la costumbre de descubrir en el enunciado de un problema todas las condiciones explícitas é implícitas; pero cuando se ha llegado á formar una ecuación con las cantidades que la cuestión supone iguales, hay procedimientos metódicos y seguros para deducir de esta expresión algebráica el valor de la incógnita, lo cual es el objeto de la segunda parte de la resolución del problema.

El Algebra se ocupa de la resolución de las ecuaciones y para conseguir este objeto, fecundo en sus aplicaciones, es necesario ejercitarse en pasar fácilmente del lenguaje ordinario á los signos ó símbolos del Algebra, y de éstos á aquel; y solo de esta manera se llega á hacer familiar el uso del Algebra, cuya dificultad *no* consiste *sino* en la perfecta inteligencia de los signos y de su empleo.

La resolución de una ecuación está fundada en los principios siguientes:

1.° *Una ecuación no se altera cuando se agrega, ó cuando se quita, una misma cantidad á sus dos miembros.* Si se agregan cantidades que contienen incógnitas, estas deben tener el mismo grado que la ecuación; á causa de que deben ser homogéneas las cantidades que se suman y se restan.

2.° *Una ecuación no se altera cuando con sus dos miembros se ejecutan operaciones iguales.* Las cantidades por las que se multiplican ó se dividen los dos miembros de una ecuación no deben ser nulas, ni infinitas, ni contener incógnitas. Como cualquiera cantidad multiplicada por cero ó dividida por el infinito, da cero por resultado; multiplicar los dos miembros de una ecuación por semejantes expresiones conduce al absurdo de que operaciones iguales ejecutadas con cantidades diferentes den resultados iguales. Por ejemplo:

$$3\times0=0$$
$$5\times0=0$$

luego $3\times0=5\times0$ y suprimiendo el factor común 0, resulta el absurdo

$$3=5$$

Tampoco deben contener los factores ó divisores de los dos miembros de una ecuación incógnitas, porque éstas pueden ser nulas ó infinitas. Por ejemplo:

sea $x=3$

multiplicando por la incógnita x los dos miembros de esta ecuación, se tiene: $x^2=3x$

restando 3^2: $x^2-3^2=3x-3^2$

descomponiendo la diferencia de los cuadrados en sus factores (251—III) $(x+3)(x-3)=3(x-3)$

suprimiendo el factor $(x-3)$ $x+3=3$

sustituyendo por x su valor de la ecuación 1.ª resulta el absurdo

$$3+3=3$$

el cual proviene de haber multiplicado implícitamente cantidades desiguales, $x+3$, y 3 por el factor $(x-3)$, que es cero.

3.° *Una ecuación no se altera haciendo sufrir á uno de sus términos ó á uno de sus miembros transformaciones que no cambien su valor.* Esto es, se pueden ejecutar una ó varias de las operaciones indicadas, y se puede invertir el orden de algunas operaciones.

262.—Resolución de las ecuaciones.—Ya hemos indicado que resolver una ecuación es efectuar las operaciones necesarias á fin de obtener otra ecuación en la que la incógnita sola forme uno de los miembros y sea igual al otro compuesto de cantidades conocidas combinadas entre sí por operaciones que se sabe ejecutar.

En una ecuación de primer grado la incógnita no puede estar ligada con las cantidades conocidas mas que por adición, sustracción, multiplicación y división.

1.ª *Toda cantidad puede pasar de uno á otro miembro de una ecuación con signo contrario.*

Sea la ecuación $x+a=b$

Supuesto que si á cantidades iguales se quita una misma cantidad los resultados serán iguales; quitando á los dos miembros de la ecuación, a, tendremos:

$$x+a-a=b-a$$

pero como $+a-a=0$, tendremos que

$$x=b-a$$

y este resultado nos enseña que la cantidad a que estaba en el primer miembro con signo $+$ ha pasado al segundo con signo $-$.

Si se tiene la ecuación

$$x-a=b$$

agregando á los dos miembros la cantidad a la ecuación no se alterará, y tendremos

$$x-a+a=b+a$$

reduciendo queda

$$x=b+a$$

resultado que nos demuestra que la cantidad $-a$ del primer miembro de la ecuación ha pasado al segundo con signo $+$

2.° *Toda cantidad que está como factor en un miembro puede pasar al otro como divisor.*

Sea $ax=b$

Como si cantidades iguales se dividen por una misma cantidad los resultados serán iguales, tendremos:

$$\frac{ax}{a}=\frac{b}{a}$$

y como $\frac{a}{a}=1$ tendremos que

$$x=\frac{b}{a}$$

resultado que nos demuestra que la cantidad a que estaba como factor de x en el primer miembro ha pasado al segundo como divisor.

3.º *Toda cantidad que está como divisor en un miembro de una ecuación puede pasar al otro como factor.*

Sea por ejemplo:

$$a=\frac{x}{b}$$

multiplicando los miembros de la ecuación por b tendremos

$$ab=\frac{xb}{b}$$

pero como $\frac{b}{b}=1$ tendremos

$$ab=x$$

donde se ve que el divisor b de x en el segundo miembro de la ecuación ha pasado al primero como factor.

4.º *Para hacer desaparecer los denominadores de algunos términos de una ecuación, se formará el menor múltiplo común de los denominadores, en seguida se multiplicarán los términos enteros por el múltiplo común, y los numeradores de los términos de la forma fraccionaria se multiplicarán por el cociente que resulte de dividir el múltiplo común por el denominador de cada término.*

Esta regla tiene por fundamento: 1.º que un término no cambia de valor cuando se multiplica y se divide por una cantidad, y 2.º que una ecuación no se altera cuando sus dos miembros se multiplican por la misma cantidad. Para dar su demostración nos valdremos de la siguiente ecuación:

$$\frac{ax}{3b^2}+a-\frac{x}{2}=\frac{a}{b}-d\,\ldots\ldots\ldots\,(1)$$

El menor múltiplo común de los denominadores es $6b^2$.

1ª *Operación.*—Multiplicaremos y dividiremos cada término de la ecuación por una misma cantidad, pero de modo que se consiga hacer que todos los términos queden con el mismo denominador: $6b^2$.

El primer término $\frac{ax}{3b^2}$ lo multiplicaremós y dividiremos por 2, cociente de $\frac{6b^2}{3b^2}$ y se transformará en $\frac{2ax}{6b^2}=\frac{ax}{3b^2}$

El segundo término siendo entero lo multiplicaremos y lo dividiremos por $6b^2$ múltiplo de los denominadores, y se transformará en

$$\frac{6ab^2}{6b^2}=a$$

El tercer término $-\frac{x}{2}$ lo multiplicaremos y dividiremos por $3b^2=\frac{6b^2}{2}$ y se transformará en $-\frac{3b^2x}{6b^2}=-\frac{x}{2}$

El primer término del 2º miembro de la ecuación $\frac{a}{b}$ lo multiplicaremos y dividiremos por $6b=\frac{6b^2}{b}$ y se transformará en $\frac{6ab}{6b^2}=\frac{a}{b}$

El segundo término del 2º miembro de la ecuación $-d$, siendo entero lo multiplicaremos y dividiremos por el múltiplo común $6b^2$ y se transformará en $-\frac{6b^2d}{6b^2}=-d$

La ecuación (1) quedará transformada en:

$$\frac{2ax}{6b^2}+\frac{6ab^2}{6b^2}-\frac{3b^2x}{6b^2}=\frac{6ab}{6b^2}-\frac{6b^2d}{6b^2}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

El fundamento de esta primera operación es: que el valor de un término no se altera cuando se multiplica y se divide por una misma cantidad, y esto es lo que se ha hecho con cada uno de los términos de la ecuación (1), reduciéndolos á un común denominador.

2ª—*Operación.*—Multiplicando todos los términos de la ecuación (2) por $6b^2$, y teniendo presente que el producto de un quebrado por su denominador es el numerador, tendremos:

$$2ax+6ab^2-3b^2x=6ab-6b^2d\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

y como una ecuación no se altera cuando se multiplican sus dos miembros por una misma cantidad, ejecutando la segunda operación subsistirá la ecuación. Se ve, pues, que la ejecución de dos operaciones que no alteran la ecuación, conduce al resultado que se obtiene desde luego aplicando la regla dada para hacer desaparecer los denominadores.

5.ª *Cuando la incógnita tiene el signo menos, y conviene obtener su valor considerándola como positiva, se cambiarán los signos á todos los términos de la ecuación.*

Por ejemplo, si tenemos $-x=a-b$
podemos poner $x=b-a$

La razón de esto es que, supuesto que podemos pasar una cantidad de un miembro de la ecuación al otro con signo contrario, pasando las del primer miembro al segundo, y recíprocamente, se tendrá $b-a=x$ luego $x=b-a$.

De otro modo, supuesto que si cantidades iguales se multiplican por una misma cantidad, los resultados serán iguales, la ecuación $-x=a-b$ subsistirá multiplicando sus términos todos por -1, y ejecutando la multiplicación se tendrá

$$x=b-a$$

lo que equivale á cambiar signos á todos los términos.

En los principios que anteceden se funda la regla general para despejar una incógnita.

Se llama *despejar una incógnita, dejarla sola en un miembro de la ecuación y sus valores en el otro.* La resolución de una ecuación tiene por objeto despejar una incógnita.

263.—Regla general para resolver una ecuación de primer grado, y de una sola incógnita.—1.º *Se quitan los denominadores*, (262—4.º). 2.º *Se ejecutan las operaciones y reducciones indicadas.* 3.º *Se pasan á un miembro de la ecuación todas las cantidades que contienen la incógnita, y al otro las que no la contienen.* 4.º *Se saca la incógnita como factor común.* 5.º *Se divide el segundo miembro de la ecuación por el factor, ó por el coeficiente de la incógnita.* 6º. *Cuando la incógnita resulta precedida del signo menos, se cambian signos á todos los términos de la última ecuación.*

Cuando en los dos miembros de la ecuación hay términos que contienen la incógnita, *es conveniente pasar el menor al otro miembro;* observando lo siguiente:

1.º Si los dos términos son positivos se pasa el de menor coeficiente;

2.° si los dos son negativos pasa el de mayor coeficiente y 3.°, cuando un término es positivo y otro negativo, se pasa el negativo.

Sea como ejemplo resolver la siguiente ecuación:

$$\frac{ax}{b}+\frac{x}{c}-2=8-\frac{x}{d}$$

1.° Para quitar los denominadores el menor múltiplo es *bcd* y conforme á la regla se tiene:

$$acdx+bdx-2bcd=8bcd-bcx$$

2.° Todas las operaciones indicadas están ejecutadas.

3.° Se pasan al primer miembro los términos que contienen la incógnita

$$acdx+bdx+bcx=8bcd+2bcd$$

4.° Sacando x como factor común, y ejecutando la reducción en el segundo miembro

$$x(acd+bd+cb)=10bcd$$

5.° Dividiendo el segundo miembro por el factor de x, se tiene por último:

$$x=\frac{10bcd}{acd+bd+bc}$$

Sea como segundo ejemplo resolver la ecuación siguiente:

$$\tfrac{4}{3}x-82=\tfrac{6}{5}x-90+\tfrac{2}{3}x$$

Quitando los denominadores, cuyo menor múltiplo es 15

$$20x-1230=18x-1350+10x$$

Pasando al primer miembro las cantidades que contienen la incógnita

$$20x-18x-10x=1230-1350$$

Ejecutando las reducciones y operaciones indicadas

$$-8x=-120$$

Dividiendo el segundo miembro por el coeficiente de x

$$-x=-\frac{120}{8}=-15$$

Cambiando los signos

$$x=15$$

Ejercicios.—Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado:

$$\frac{ab}{x}-\frac{1}{x}=bc+d \qquad \text{Resolución } x=\frac{ab-1}{bc+d}$$

$$\frac{a^2x}{b-c}+dc=bx-ac \qquad \text{R. } x=\frac{c(a+d)(b-c)}{b(b-c)-a^2}$$

$$b=a+\frac{m(a-x)}{3a+x} \qquad \text{R. } x=\frac{a(m-3b+3a)}{b-a+m}$$

$$\frac{a(d^2+x^2)}{dx}=\frac{ax}{d}+ac \qquad \text{R. } x=\frac{d}{c}$$

$$\frac{cx^m}{a+bx}=\frac{fx^m}{d+ex} \qquad \text{R. } x=\frac{af-cd}{ce-bf}$$

$$\frac{7x^n}{x-1}+\frac{3x^n+6x_{n+2}}{x^2-1}=\frac{6x^{n+1}+x^n}{x+1} \qquad \text{R. } x=-\frac{11}{12}$$

$$\frac{a}{bx}+\frac{c}{dx}+\frac{e}{fx}+\frac{g}{hx}-k=0 \quad \text{R. } x=\frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhk}.$$

$$\frac{3abc}{a+b}+\frac{a^2b^2}{(a+b)^3}+\frac{(2a+b)b^2x}{a(a+b)^2}=3cx+\frac{bx}{a} \quad \text{R. } x=\frac{ab}{a+b}$$

$$\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}+\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}$$

$$\text{R. } x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}$$

$$(a+x)(b+x)-a(b+c)-x^2=\frac{a^2c}{b} \quad \text{R. } x=\frac{ac}{b}.$$

264.—Plantear el problema.—*Esta parte tiene por objeto formar una ecuación en la que se indiquen las condiciones que en el problema ligan las cantidades conocidas con las desconocidas.* Para conseguirlo, ante todo, es indispensable comprender bien las condiciones tácitas y expresas que deben satisfacerse, examinando con atención los datos de la cuestión.

La inteligencia del problema suele facilitarse suponiendo que la incógnita tenga un valor numérico y ejecutando las operaciones indicadas en el enunciado con este número arbitrario para asegurarse de que satisface las condiciones del problema. Una vez comprendido éste, podrá siempre plantearse aplicando la siguiente

Regla para plantear un problema.—*Se supone resuelto, y representando la incógnita por x, se indican con los signos algebráicos las mismas operaciones que sería necesario ejecutar con la incógnita si estuviera conocida para asegurarse de que satisface las condiciones del problema.* Se ve, pues, que para plantear un problema basta expresar su verificación con los signos del Algebra.

Supongamos que se pregunta cuál es el número cuya mitad, sumada con su tercera, con su cuarta parte y con 18, da por resultado 70.

Representando por x el número buscado, su mitad será: $\frac{x}{2}$, su tercera será $\frac{x}{3}$, su cuarta será $\frac{x}{4}$ y expresando las operaciones indicadas en el enunciado para obtener por resultado 70, el problema quedará planteado en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{4}+18=70$$

que se resolverá como sigue:

Quitando los denominadores, cuyo menor múltiplo es 12

$$6x+4x+3x+216=840$$

Pasando al segundo miembro 216, se tendrá

$$6x+4x+3x=840-216$$

Reduciendo

$$13x=624$$

Dividiendo por 13 $\qquad x=\frac{624}{13}=48$

265.—Verificación del valor de la incógnita.—Después de haber planteado el problema, y resuelto la ecuación, se debe comprobar que el valor obtenido para la incógnita, satisface las condiciones exigidas por el enunciado del problema. *Esta verificación se hace ejecutando con el valor de la incógnita las operaciones indicadas en el enunciado de la cuestión, y viendo si se obtiene el resultado pedido.*

En el problema anterior el valor de la incógnita fué 48,

su mitad es......................24
su tercera parte..................16
su cuarta........................12
y agregando......................18

se obtiene........................70, número que satisface las condiciones del problema.

Es útil hacer esta comprobación, porque así se descubre si se ha cometido algún error al plantear el problema, ó si se ha padecido alguna equivocación en la resolución de la ecuación.

266.—Problemas de primer grado y una sola incógnita.—I. *Dividir el número 230 en tres partes, tales que el exceso de la parte media sobre la más pequeña sea 40, y que la mayor exceda á la parte media 60.*

1.º *Plantear el problema.*

Si la parte media es x, la menor será $x-40$, y la mayor $x+60$; y como la suma de las tres partes debe dar 230, formaremos la siguiente ecuación:

$$(x-40)+x+(x+60)=230$$

2.º *Resolver la ecuación.*

No habiendo denominadores y estando en el primer miembro todos los términos que contienen la incógnita, pasaremos al segundo los que no la contienen.

$$x+x+x=230+40-60$$

Reduciendo $3x=210$

Dividiendo por 3 $x=70$ parte media

$70-40=30$ parte menor

$70+60=130$ parte mayor

3.º *Verificación* ó prueba.

Siendo 70 la parte media, la menor será 30, la mayor 130 y la suma de las tres partes $30+70+130$ dando el número propuesto 230, el resultado obtenido quedará comprobado.

II. *Una persona tiene 40 años y su hijo 12; se desea saber dentro de cuántos años el padre tendrá el triple de la edad de su hijo.*

Suponiendo que esto se verifique dentro de x años, entonces la edad del padre será $40+x$, y la del hijo $12+x$; pero supuesto que la primera debe ser triple de la segunda, tendremos la siguiente ecuación:

$$40+x=3(12+x)$$

Ejecutando la multiplicación $40+x=36+3x$

Pasando al segundo miembro x $40-36=2x$

$4=2x$

de donde $x=2$

En efecto, á los dos años el padre tendrá 42 años de edad, y el hijo 14; y como $42=3\times14$ quedará resuelto y comprobado el problema.

III. *¿Cuál sería la deuda de una persona quien después de haber pagado primero la mitad de su deuda, en seguida la tercera parte, y la doceava parte después, queda debiendo* 630 *pesos?*

Si se llama x la deuda total que se busca, se tendrá planteado el problema en la siguiente ecuación:

$$x=\frac{x}{2}+\frac{x}{3}+\frac{x}{12}+630$$

Para resolver esta ecuación, quitaremos los denominadores, observando que 12 es el menor múltiplo común y tendremos:

$$12x=6x+4x+x+7560$$
$$12x-11x=7560$$
$$x=7560$$

En efecto, $$7560\,\$=\frac{7560}{2}+\frac{7560}{3}+\frac{7560}{12}+630$$

IV. *¿Cuál es el número cuyo tercio y cuarto juntos suman* 63?

Llamando x el número buscado, tendremos planteado el problema en la siguiente ecuación:

$$\tfrac{1}{3}x+\tfrac{1}{4}x=63$$

Quitando los denominadores: $4x+3x=12\times 63$

Reduciendo $7x=756$

Despejando $x=108$

La tercera parte de 108 es 36, su cuarta 27 y la suma de estas dos partes da 63.

Si se quiere resolver el problema semejante: *determinar un número cuya quinta y sexta parte juntas sumen* 22, será necesario plantear de nuevo el problema en la ecuación:

$$\frac{x}{5}+\frac{x}{6}=22$$

y en seguida resolverlo de una manera análoga

$$6x+5x=30\times 22$$

$$x=\frac{660}{11}=60$$

Vamos á indicar, con este motivo, la ventaja que hay de emplear los signos algebráicos en estos casos. En efecto, si se buscara una regla para obtener, de la manera más sencilla, el resultado en estos dos problemas y en todos los semejantes, bastaría reemplazar las cantidades conocidas por letras y ejecutar las operaciones correspondientes á la resolución del problema, que podría establecerse de un modo general en estos términos: *Buscar un número* x *que dividido primero por* a *y luego por* b *la suma de los cocientes sea* s.

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=s \qquad\qquad x=\frac{abs}{a+b}$$

Esta última expresión no es el valor numérico de la incógnita; pero indicando las operaciones que deben efectuarse con los datos del problema para determinarlo, bastará sustituir éstos en lugar de las letras que los representan y ejecutar las operaciones indicadas para obtener el valor de la incógnita, cualesquiera que sean los datos del problema. Esto es, el resultado obtenido es una regla general para resolver todos los problemas semejantes. La expresión $x=\frac{abs}{a+b}$ es *una fórmula* é indica de una manera abreviada y precisa la regla para resolver un problema semejante á aquellos de que nos venimos ocupando, y que podría traducirse en el lenguaje común de la manera siguiente: *El producto de las tres cantidades conocidas se dividirá por la suma de los dos divisores, para obtener el valor de la incógnita.*

Si valiéndonos de la fórmula $x=\frac{abs}{a+b}$ queremos resolver el problema dado, *encontrar un número cuya quinta y sexta parte juntas formen* 22, tendremos $a=5$, $b=6$, $s=22$, y sustituyendo en la fórmula

$$x=\frac{abs}{a+b}$$

se tiene

$$x=\frac{5\times 6\times 22}{5+6}=\frac{660}{11}=60$$

V. *La suma de la edad de dos hermanos es 57 años, y sabiendo que el mayor tiene 7 años más que el menor, se quiere determinar la edad de cada uno.*

Sea x la edad del hermano menor, la del mayor será $x+7$, y la suma de las dos edades, debiendo ser 57 años, plantearemos el problema en la siguiente ecuación:

$$x+(x+7)=57$$

Resolviéndola se tiene $x=25$, edad del hermano menor.

$x+7=32$, edad del mayor.

Suma de las edades........57

Reflexionando un poco, se observará que hay algunos pormenores inútiles en el enunciado del problema, que puede reducirse á buscar dos números cuya suma sea 57 y su diferencia 7. Es muy útil desembarazar un problema de todos los accesorios extraños á su esencia, y los cuales contribuyen á oscurecerlo y á hacer perder la relación que existe entre las cantidades. Solo la práctica puede enseñar á entresacar lo que es necesario y lo que es inútil en un problema.

A fin de generalizar el problema precedente, *busquemos dos números que tengan* s *por suma y* d *por diferencia.*

Siendo x el menor, el mayor será $x+d$, y debiendo ser s la suma de los dos, tendremos la siguiente ecuación:

$$x+(x+d)=s$$

Resolviéndola se tiene: $2x=s-d$, y $x=\frac{s-d}{2}$

El número mayor será: $x+d=\frac{s-d}{2}+d=\frac{s-d+2d}{2}=\frac{s+d}{2}$

De consiguiente: $x=\frac{s-d}{2}$ $\quad x+d=\frac{s+d}{2}$

Se ve, pues, que conforme á estas fórmulas, *conocida la suma y diferencia de dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma, más la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.*

VI. *Dividir un número* a *en dos partes que estén entre sí como* m *es con* n.

Siendo una parte x, para obtener la otra, estableceremos la proporción:

$$m : n :: x : \frac{nx}{m}$$

y como la suma de las dos partes debe ser a, se tendrá la ecuación:

$$x+\frac{xn}{m}=a$$

Resolviéndola se tiene $\quad x=\frac{ma}{m+n}$

Si se quiere dividir a *en tres partes que estén entre sí, como* m : n : p; siendo x la primera parte, la segunda y tercera se determinarán por las proporciones:

$$m : n :: x : \frac{nx}{m}$$

$$m : p :: x : \frac{px}{m}$$

y debiendo ser la suma de las tres partes igual á a se tendrá la ecuación:

$$x+\frac{nx}{m}+\frac{px}{m}=a$$

resolviéndola se tiene $$x=\frac{ma}{m+n+p}$$

Fórmula que se aplicará para resolver todas las cuestiones de la regla de compañía simple.

VII. *Si se duplicara el número de pesos que tengo, decía una persona, daría 8 pesos; y habiéndose verificado esto tres veces consecutivas no le quedó nada. ¿Cuántos pesos tenía este hombre?*

Llamándolos x, la primera vez le quedarían $2x-8$; la segunda vez $2(2x-8)-8=4x-24$; y la tercera vez $2(4x-24)-8$, y este valor debe ser igual á cero. El problema quedará planteado como sigue:

$$2(4x-24)-8=0$$

Resolviendo la ecuación $8x-48=8,\ 8x=56,\ x=7$

VIII. *A una fuente le entra agua por dos llaves, y observando que con el agua que entra por la 1.ª se llena en cuatro horas, y que abierta la 2.ª llave solamente, se llena en ocho horas, se quiere saber ¿en cuántas horas se llenará con las dos llaves abiertas?*

Supuesto que con la primera llave la fuente se llena en 4 horas, en una hora se llenará $\frac{1}{4}$ de la fuente, y con la segunda llave se llenará $\frac{1}{8}$ de la fuente en una hora. En consecuencia, abiertas las dos llaves se llenará $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ de la fuente en una hora, y llamando x el número de horas necesario para llenar toda la fuente, podremos establecer la siguiente ecuación:

$$\tfrac{1}{4}x+\tfrac{1}{8}x=1$$

Resolviéndola se tiene: $2x+x=8,\ x=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}$ horas.

La fuente se llenará en 2 horas 40 minutos.

IX. *Una persona que ve á otra tirar al blanco, le ofrece darle 10 pesos cada vez que acierte un tiro, con la condición de que por cada uno que yerre le pague 5 pesos.* Después de 20 tiros resulta que el tirador ha ganado 80 pesos, se quiere saber ¿cuántos tiros acertó y cuántos erró?

Llamando x el número de tiros acertados, $20-x$ será el de los errados, y como por cada uno de los primeros el tirador recibía 10 pesos, y por cada uno de los segundos pagaba 5 pesos, habiendo ganado 80 pesos, estableceremos la siguiente ecuación:

$$10x-5(20-x)=80$$

Resolviéndola $\quad 10x-100+5x=80,\ 15x=180$

$$x=12$$

El número de tiros acertados será 12, el de los errados, 8. El tirador habrá recibido 10×12, y habrá pagado 5×8; en consecuencia, habrá ganado 80 pesos.

Si se trata de generalizar esta cuestión, de modo que por cada tiro que acierte el tirador reciba a, por cada uno de los que yerre pague b; y después de n tiros resulte una de tres cosas: 1°, que el tirador haya ganado d pesos; 2°, que haya perdido d pesos; y 3°, que no haya ganado ni perdido.

En cada caso la ecuación y el resultado será el siguiente:

1$^{er.}$ caso: $\quad ax-b(n-x)=d,\ x=\dfrac{bn+d}{a+b}$

2° caso: $\quad ax-b(n-x)=-d,\ x=\dfrac{bn-d}{a+b}$

3er caso: $\quad ax-b(n-x)=0,\ x=\dfrac{bn}{a+b}$

De la fórmula $x=\dfrac{bn+d}{a+b}$ puede deducirse el resultado del 2° caso sin necesidad de establecer la segunda ecuación ni resolverla, con solo sustituir $-d$ en lugar de d, y el resultado del 3er caso puede deducirse igualmente de la misma fórmula, haciendo $d=0$. Por esto se ve que cuando hay variación en el valor ó en el sentido de un dato en una cuestión ya resuelta, basta hacer la modificación correspondiente en el último resultado, sin que sea necesario resolver la cuestión desde su origen con esa variación en los datos.

A menudo sucede en Algebra, que teniéndose una fórmula tal como la de la cuestión de que venimos ocupándonos $x=\dfrac{bn+d}{a+b}$ se considera la incógnita como dato y uno de los datos anteriores como incógnita. Entonces tampoco es necesario resolver la cuestión desde su origen, y bastará despejar de la fórmula final la literal que se considere como incógnita.

Por ejemplo, si se conoce el número de tiros acertados y se quiere determinar la ganancia del tirador, sin necesidad de plantear nuevamente el problema, de la ecuación

$x=\dfrac{bn+d}{a+b}$ se despejará $\qquad d=x(a+b)-bn$

En general, *en una ecuación se puede tomar por incógnita cualquiera de los datos ó literales que entran en ella*, no siendo necesario distinguir los elementos de una ecuación en datos ó incógnitas, sino expresar simplemente la relación que liga las cantidades que forman la ecuación.

X. Determinar el valor de la fracción periódica simple 0'(273).

Sea $0'(273)=x$
multiplicando por 1000 $273'(273)=1000x$

restando la primera ecuación de la última se obtiene:

$$273=999x$$

$$x=\frac{273}{999}$$

XI. Determinar el valor de la fracción periódica mixta 0'54(273).

Sea $0'54(273)=x$
multiplicando por 100 $54'(273)=100x$
multiplicando ésta por 1000, $54273'(273)=100000x$

restando de esta última ecuación la anterior se tiene:

$$54273-54=99900x$$

luego $$x=\frac{54273-54}{99900}$$

Este resultado es igual al que se obtiene conforme á la regla demostrada en Aritmética. [174—4º caso.]

En efecto $$0'54(273)=\frac{54}{100}+\frac{273}{99900}$$

$$\frac{54}{100}+\frac{273}{99900}=\frac{54\times 999+273}{99900}=\frac{54(1000-1)+273}{99900}=\frac{54000-54+273}{99900}$$

y finalmente $$0'54(273)=\frac{54273-54}{99900}$$

DISCUSION

DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO, Y OBSERVACIONES SOBRE LAS CANTIDADES NEGATIVAS Y VALORES INFINITOS, INDETERMINADOS É IMPOSIBLES.

267.—Formas diversas que pueden tener los valores de la incógnita. —En los problemas que hemos resuelto se habrá observado que la incógnita no ha tenido más que un valor, que este ha sido positivo, y que sustituido en la ecuación que nos ha servido para plantearlo se ha obtenido para el primer miembro un valor igual al del segundo; pero debiéndose considerar en Algebra las relaciones entre las cantidades de la manera más general que sea posible, es necesario tener símbolos para representar todos los resultados á que pueda conducir la resolución de un problema ó de una ecuación.

El valor de una incógnita puede ser *positivo ó negativo; nulo ó infinitamente grande; determinado ó indeterminado*; *posible ó imposible.* Será positivo cuando su valor sea mayor que cero y negativo en el caso contrario; será nulo cuando sea igual á cero, é infinito cuando sea mayor que cualquiera magnitud; será determinado cuando no tenga más de un solo valor, é indeterminado cuando admita cualquiera; por último, será imposible cuando no haya ninguna cantidad que pueda satisfacer las condiciones del probiema.

Demostraremos ante todo, *que en cualquiera ecuación de primer grado, la incógnita no puede tener más que un solo valor.*

Demostración.—La forma más general que puede darse á una ecuación de primer grado, después de quitar los denominadores, de hacer positivos todos los términos y de sacar la incógnita como factor común, en cada miembro, es:

$$ax+b=cx+d$$

suponiendo que la incógnita x pudiera tener dos valores diferentes, n y n' por ejemplo, que verificaran la ecuación, tendriamos:

$$an+b=cn+d \text{ de la que } n=\frac{d-b}{a-c}$$

y también

$$an'+b=cn'+d \text{ de la que } n'=\frac{d-b}{a-c}$$

y como dos cantidades, n, y n' iguales á una tercera no pueden ser desiguales, resulta que tendrán que ser iguales, y por tanto, la incógnita en una ecuación de primer grado no puede tener más que un solo valor, que es lo que se debía demostrar.

268.—Cantidades negativas.—En general, se puede considerar que las cantidades negativas son originadas por la sustracción de una cantidad mayor de otra menor, y como se sabe que el valor de la resta disminuye á medida que el sustraendo aumenta, tendremos que siendo por ejemplo, $4-4=0$: si aumentamos una unidad al sustraendo, la resta disminuirá una unidad, y como $4-5=-1$ inferimos que el símbolo -1 debe considerarse como una cantidad, una unidad menor que cero; $4-6=-2$ será un resultado dos unidades menor que el de $4-4$, luego -2 debe considerarse como 2 unidades menor que cero. De esta consideración, que puede ampliarse cuanto se quiera, nace el principio convencional de considerar el cero como origen de las cantidades, siendo las positivas mayores que cero y las negativas menores que cero.

Si se concibe la escala decreciente de los números positivos y se continúa rebajando sucesivamente una unidad, se obtendrán los números negativos menores que cero como sigue:

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5 \ldots\ldots\ldots$$

La diferencia entre el número positivo $+4$ y -2, por ejemplo, se ve que es 6 unidades, número que se obtiene cambiando el signo del sustraendo -2 y sumando 4 con 2.

De dos números negativos es menor el de mayor valor numérico. Sean dos cantidades ó números, N y n, en los que $N>n$, y demostraremos que $-N<-n$

Tenemos que $\quad N-N=0$

y $\quad n-n=0$

luego $\quad N-N=n-n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

Por ser $N>n$, será N igual á n más alguna cantidad, que representaremos por d, esto es

$$N=n+d$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (1) se tiene:

$$n+d-N=n-n$$

suprimiendo n en los dos miembros, y trasladando á d resulta:

$$-N=-n-d$$

luego $\quad -N<-n.$

Cuando en las operaciones entran cantidades negativas, el valor del resultado no estará siempre sujeto á los principios establecidos para las positivas. Así, si se suma con 4, por ejemplo, —2, la suma es menor que el sumando 4: si se resta de 4, por ejemplo, —2, la resta ó diferencia 6 es mayor que el minuendo.

Aunque no se concibe fácilmente que una cantidad negativa pueda existir por sí sola, se conviene en ejecutar con ella las operaciones bajo las mismas reglas que si estuviera acompañada, y la exactitud de los resultados obtenidos en las operaciones que hasta ahora hemos hecho con los términos negativos, considerándolos aisladamente ó reunidos á otros, nos comprueba que esto no tiene ningún inconveniente. Las cantidades negativas deben considerarse como resultados de ciertos cálculos, resultados que necesitamos representar por signos que los distingan de los valores positivos. Así pues, —3, por ejemplo, es el símbolo que representa el resultado de la sustracción 6—9, sea que estas cantidades estén aisladas ó reunidas á otras con las cuales debamos combinar el resultado —3, y si ejecutamos una operación cualquiera con la expresión 6—9, como una multiplicación, una división, una elevación á determinada potencia, etc., obtendremos el mismo resultado que si hacemos igual operación con la cantidad negativa —3, aplicando las reglas correspondientes á los signos. La razón de esto es que siendo valores iguales —3 y 6—9, los resultados de las operaciones que se ejecuten con una ó con otra expresión tendrán que ser iguales. Algunas aplicaciones de las cantidades negativas, se derivan de la propiedad que tienen los signos + y — de indicar analiticamente la oposición de sentido en las cantidades. Por ejemplo, si en una medida se conviene en distinguir con el signo +, todas las medidas que se hagan subiendo, y con el signo —, las que se hagan bajando; el resultado final indicará lo que un punto está *más alto ó más bajo* que el punto de partida, según sea su signo. Si un comerciante anota con el signo + lo que vende, y con el signo — lo que compra, el signo del resultado final le indicará cuánto tiene de más ó de menos que al comenzar sus operaciones mercantiles. Así, lo repetimos, los signos + ó — indican la oposición de sentido de que son susceptibles ciertas cantidades, como caminar al Norte ó al Sur; pagar ó recibir; ganar ó perder; adelantar ó retroceder; aumentar ó disminuir, etc. En los casos en que por la naturaleza de los problemas pueden admitirse resultados positivos y negativos, no se debe modificar su enunciado aunque el valor de la incógnita resulte negativo, y puede tomarse como contestación directa del problema tal como se ha propuesto.

El empleo de las cantidades negativas, constituye una de las más notables diferencias entre el Algebra y la Aritmética y sometiendo esa clase de cantidades á las reglas del cálculo, se obtiene un poderoso medio para *generalizar*, que como hemos visto, es uno de los principales fines que nos proponemos en Algebra al tratar las cuestiones del resorte de esta ciencia.

Si se tiene el problema siguiente: *encontrar un número que sumado con la cantidad* a *dé por resultado* s.

Llamando x el número buscado tendremos la siguiente ecuación:

$$a+x=s$$

Resolviéndola $$x=s-a$$

Hagamos algunas aplicaciones de esta fórmula dando valores á las cantidades conocidas. Si $s=35$ y $a=23$ se tendrá:

$$x=35-23=12$$

resultado que contesta directamente el problema.

Si hacemos $s=20$ y $a=38$ se tendrá:

$$x=20-38=20-(20+18)=20-20-18$$
$$x=-18$$

Este resultado negativo ha provenido de restar una cantidad 38 de otra menor 20, operación que materialmente no puede practicarse, y como toda fórmula no puede ofrecer una idea racional á menos que indique operaciones ó cálculos numéricos cuya ejecución sea posible, tenemos que interpretar convenientemente el resultado obtenido.

Si considerando los datos que nos han conducido á este resultado negativo -18, nos remontamos al problema primitivo, se verá que es imposible encontrar un número que sumado con 38 pueda dar 20 por suma. Con estos datos el problema es absurdo y el resultado negativo nos lo indica. Sin embargo, si en la ecuación que sirve para traducir el problema $38+x=20$ sustituimos por x el valor obtenido, -18, se tendrá $38-18=20$, ecuación exacta; luego el valor obtenido tomado con su signo verifica la ecuación del problema, y además la ecuación $38-18=20$ nos indica que las condiciones deben variarse así: encontrar un número que *restado* de 38 dé por resultado 20. Estas condiciones son análogas á las del problema primitivo; pero á fin de obtener el mismo resultado 20 ha sido necesario modificar el período de la cuestión en que entraba la incógnita.

Vamos á resolver el siguiente problema: Siendo 18 años la edad de una persona y 36 la de su padre, se pregunta ¿dentro de cuántos años la edad del hijo será $\frac{4}{6}$ de la de su padre?

Llamando x el número de años que deben pasar para que la edad del hijo sea los $\frac{4}{6}$ de la del padre, tendremos la siguiente ecuación:

$$18+x=\tfrac{4}{6}\,(36+x)$$

Resolviéndola $\quad 18\times6+6x=4\times36+4x, \qquad 2x=144-108$

$$x=\tfrac{36}{2}=18$$

En efecto, dentro de 18 años, el padre tendrá $36+18=54$ años, el hijo tendrá $18+18=36$; y siendo 9 la sexta parte de 54 se ve que.... $36=4\times9$. Este valor *positivo* de la incógnita ha contestado directamente el enunciado del problema.

Sea ahora por resolver el siguiente problema: *Siendo* 18 *años la edad de una persona, y* 36 *la de su padre, se quiere saber ¿dentro de cuántos años el hijo tendrá* $\frac{1}{3}$ *de la edad de su padre?*

El problema planteado dá $18+x=\frac{1}{3}\,(36+x)$

Resolviéndolo $\quad 18\times3+3x=36+x, \qquad 2x=36-54$

$$x=\frac{-18}{2}=-9$$

Cuando la cuestión por su naturaleza no admite valores negativos, este resultado nos indica que el problema tal como se ha propuesto es absurdo, y en efecto, bastará reflexionar que teniendo el hijo actualmente la mitad de la edad de su padre $\left(18=\frac{36}{2}\right)$ y siendo un tercio de 36 menor que 18, es imposible que dentro de algunos años el hijo pueda llegar á tener una edad inferior á la que ahora tiene; pero sustituyendo este valor -9 en lugar de $+x$ en la ecuación en que se ha planteado el problema, tendremos el medio de modificar convenientemente el enunciado de la cuestión para hacerla posible. La ecuación primitiva era $18+x=\frac{1}{3}\,(36+x)$; poniendo por x su valor se tiene: $18-9=\frac{1}{3}\,(36-9)$, ecuación verdadera, y la cual es traducción del siguiente problema: *siendo la edad de una persona* 18 *años y la de su padre* 36, *se quiere saber ¿cuántos años hace que la edad del hijo fué* $\frac{1}{3}$ *de la de su padre?*

El resultado negativo nos indica que en lugar de tener que transcurrir algunos años para que se satisfagan las condiciones del problema, debe buscarse cuántos son los años que han pasado después que dichas condiciones se verificaron.

El examen de estos problemas y el de todos los que conducen á resultados negativos, sirve de fundamento á los siguientes principios:

1.° *Todo valor positivo de la incógnita resuelve ó contesta directamente el problema tal como ha sido propuesto.*

2.° *Un valor negativo encontrado para la incógnita, en el caso de que la cuestión no admita esta clase de valores, no contesta sino indirectamente al problema; pero sustituido el valor de la incógnita con su signo en la ecuación la verifica, y puede servir para modificar convenientemente las condiciones del problema. El valor absoluto de la incógnita tomado positivamente será la solución del problema modificado.*

269.—Discusión de la ecuación de primer grado con una incógnita.—*Se llama discutir una ecuación, examinar metódicamente la variación que produce en el resultado final, ó en la ecuación primitiva un cambio en el valor de una ó de varias cantidades que la forman.*

El examen de las alteraciones que origina el atribuir á los datos de un problema valores particulares, es de la mayor importancia: para obtener todas las ventajas de este método, es conveniente considerar un problema en toda su generalidad, prescindiendo de los valores numéricos y representando las cantidades con letras. Podríamos discutir la ecuación general de primer grado $ax+b=cx+d$ considerándola en abstracto; pero para facilitar la inteligencia de nuestras explicaciones, consideraremos en general el problema resuelto en el párrafo anterior, que da lugar á una ecuación de la misma forma después de quitar los denominadores y ejecutar las multiplicaciones en la ecuación que sirve para plantearlo.

Siendo 18 *años la edad de una persona y* 36 *la de su padre ¿dentro de cuántos años la edad del hijo será* $\frac{4}{6}$ *de la del padre?* Llamando h la edad del hijo, p la del padre, $\frac{n}{m}$ la relación entre las edades y x el número de años que han de pasar, tendremos:

$$h+x=\frac{n}{m}[p+x]$$

quitando el denominador: $mh+mx=np+nx$

resolviéndola $\qquad x=\dfrac{np-mh}{m-n}$..................(1)

Las formas de los resultados de una ecuación, son seis: positivo, negativo, nulo, infinito, indeterminado é imposible.

1.° El valor *de x puede ser positivo*, y para esto es necesario que tanto el numerador como el denominador sean positivos, ó que ambos sean negativos, esto es, se debe tener juntamente $np>mh$, y $m>n$, ó bien $np<mh$, y $m<n$; cuando estas dos últimas condiciones estén satisfechas, tendremos que el cociente de una cantidad negativa por otra negativa será positivo. Para comprobar los resultados, basta hacer $h=18$, $p=36$, $n=4$ y $m=6$ y se tiene $x=\dfrac{np-mh}{m-n}=18$

ó bien $h=20$, $p=10$, $n=5$ y $m=4$, y se tiene $x=\frac{np-mh}{m-n}=30$

Cuando el valor de la incógnita es positivo contesta directamente el problema tal como ha sido planteado.

2.º El valor de x *puede ser negativo*, y para esto es necesario que el numerador y el denominador tengan signos contrarios. Esto es, se debe tener

$np<mh$, y $m>n$, haremos $n=1$, $m=3$, $h=18$ y $p=36$
ó bien $np>mh$, y $m<n$, haremos $n=3$, $m=2$, $h=36$ y $p=30$

Cuando el valor de la incógnita es negativo, y la cuestión no admite esta clase de valores, no contesta sino indirectamente el problema.

3.º El valor de x *puede ser igual á cero*, y para esto es necesario que el numerador de su valor sea cero, supuesto que cero dividido por cualquiera cantidad da cero por cociente. El valor general $x=\frac{np-mh}{m-n}$ se transformará en

$$x=\frac{0}{m-n}$$

y para esto es preciso que se tenga

$$np=mh$$

ecuación de la cual resulta $\frac{n}{m}=\frac{h}{p}$.

En consecuencia, si en nuestro problema damos valores que satisfagan esta última condición, obtendremos 0 para el valor de x. Si teniendo el hijo 18 años y el padre 36, queremos saber dentro de cuántos años el hijo tendrá $\frac{4}{8}$ de la edad del padre, tendremos:

$$x=\frac{np-mh}{m-n}=\frac{4\times 36-8\times 18}{8-4}=\frac{0}{4}=0$$

En efecto, teniendo el hijo la edad de 18 años $=\frac{4}{8}$ de 36, es claro que no necesita pasar ningún tiempo para que se satisfagan las condiciones del problema.

4.º El valor de x *puede ser infinitamente grande*, resultado que se nos revelará cuando el denominador del quebrado que representa el valor de x sea cero. En efecto, si tenemos la expresión $x=\frac{a}{0}$, como mientras menor sea el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto mayor será el cociente, resulta que cuando el divisor ha llegado á ser menor que cualquiera cantidad dada, el cociente habrá tomado un valor mayor que otro cualquiera, y esto es lo que denominamos por infinito, representándolo por el signo $\frac{a}{0}=\infty$

Para que el valor de $x=\frac{np-mh}{m-n}$ sea infinito, es necesario que el denominador $m-n=0$, esto es, que $m=n$. Si se introduce esta condición en el problema, éste se cambia en saber ¿de aquí á cuántos años llegará á tener una persona la misma edad que su padre, teniendo éste 36 años y 18 el hijo? El resultado de $x=\infty$ nos indica un absurdo en el enunciado del problema cuando la incógnita no admite un valor de esta especie. En el presente caso, el resultado obtenido indica que después de una infinidad de años, la diferencia entre las edades será despreciable ante la magnitud de esas edades.

5º El valor de x *puede ser indeterminado*, esto es, puede suceder que las condiciones exigidas por el problema estén satisfechas con cualquier valor que se dé á la incógnita. Para esto es necesario que el valor de x tenga la forma de $\frac{0}{0}$. En efecto, si se tiene $x=\frac{0}{0}$ se deduce $x\times 0=0$, y como cualquiera cantidad multiplicada por 0, da 0 por producto, se infiere que x podrá tener cualquier valor.

Para este caso es preciso tener en el valor de $x=\frac{np-mh}{m-n}$

$m=n$, y $np=mh$, para reducirlo á $x=\frac{0}{0}$

y siendo $m=n$ para que $np=mh$ es preciso que $p=h$.

Introducidas estas condiciones en nuestro problema, se convierte en este: ¿dentro de cuántos años tendrán la misma edad dos personas que ahora tienen 18 años? Y es claro que la tendrán dentro de 1, de 2, de 3 y de cualquier número de años, resultado indicado por el símbolo de indeterminación $x=\frac{0}{0}$.

Sin embargo, hay veces en las que el símbolo $x=\frac{0}{0}$ indica la presencia de un factor común al numerador y al denominador, factor que se ha hecho nulo en virtud de un valor atribuido á alguna de las cantidades que entran en los términos del quebrado que representa el valor de x. Si se tiene como valor de la incógnita en un problema:

$$x=\frac{3(a^2-b^2)}{4(a-b)}$$

y se supone $a=b$, se tendrá $x=\frac{0}{0}$ resultado que podría hacer creer que el problema es indeterminado; pero si se observa que tanto el numerador como el denominador tienen el factor $a-b$ que se vuelve 0 á consecuencia de la condición de que $a=b$, y se tiene cuidado de suprimir este factor antes de introducir en la expresión la condición $a=b$, se tendrá:

$$x=\frac{3(a^2-b^2)}{4(a-b)}=\frac{3(a-b)(a+b)}{4(a-b)}=\frac{3(a+b)}{4}$$

haciendo ahora $a=b$, se tiene $x=\frac{6a}{4}$, verdadero valor de la incógnita en este caso.

Así, pues, el símbolo $\frac{0}{0}$ indica algunas veces la existencia de un factor común á los dos términos de la fracción del valor de la incógnita, factor que se hace nulo en virtud de determinadas condiciones; por lo cual, antes de decidir si el problema es indeterminado, es forzoso asegurarse de que no existe ningún factor común que pueda hacerse nulo.

6.° Por último, puede suceder que se tenga un resultado absurdo por sí mismo, como $3a=5a$, ó contradictorio con las condiciones del problema, como cuando resulta el valor de la incógnita fraccionario, no pudiendo ser sino entero. En este caso el problema es imposible.

Si por ejemplo, se busca un número cuya mitad, más su tercera parte, sea igual al duplo del mismo número. La cuestión quedará planteada en la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=2x$$

quitando los denominadores y reduciendo se tiene $3x+2x=12x$, lo cual es absurdo, pues sería necesario tener $5=12$.

Si preguntamos cuál es el número de animales que hay en un establo y resulta, por ejemplo, 7 y $\frac{2}{3}$, este será un resultado inadmisible y el problema imposible.

En cualquier caso es preciso comenzar por asegurarse de que no se ha cometido ningún error al plantear ó al resolver el problema; en seguida se examinará si la cuestión propuesta puede admitir un valor de la forma obtenida.

De las observaciones que anteceden resulta:

1.° *Que toda ecuación de primer grado con una incógnita, no admite más que una sola resolución.*

2.°—*Todo valor positivo de la incógnita resuelve ó contesta directamente el problema tal como ha sido propuesto.*

3.°—*Un valor negativo encontrado para la incógnita, en el caso de que la cuestión no admita esta clase de valores, no contesta sino indirectamente* *al problema; pero sustituido el valor de la incógnita con su signo en la ecuación la verifica, y puede servir para modificar convenientemente las condiciones del problema.*

4.° *Toda expresión de la forma* $\frac{0}{a}$ *encontrada para la incógnita indica un valor nulo, y todo valor de la forma* $\frac{a}{0}$ *expresa un valor infinito.*

5.° *El símbolo* $\frac{0}{0}$ *indica una indeterminación, ó la existencia de un factor común á los dos términos del quebrado, valor de la incógnita, que se ha hecho nulo.*

6.° *Todo valor inadmisible por sí mismo é incompatible con las condiciones del problema, indica que este es imposible.*

270.—Problemas.—Para ejercicio de los alumnos pondremos los siguientes que se prestan á ser discutidos:

I.—Tejiendo un trabajador a metros de tela al día, y otro b metros en el mismo tiempo, se pregunta: ¿dentro de cuántos días tendrán tejidos igual número de metros? en el concepto de que el primero tiene ya tejidos c metros y el segundo $c+m$.

Llamando x el número de días, el problema se plantea por medio de la ecuación

$$c+ax=c+m+bx,$$

de la que resulta

$$x=\frac{m}{a-b}$$

II.—Dos correos parten de dos ciudades, distantes una de la otra a leguas, al mismo tiempo y en igual dirección. El primer correo anda m leguas por hora, y el segundo n leguas por hora. Se pregunta: ¿á qué distancia de la ciudad más lejana se encontrarán los dos correos?

Llamando x esta distancia, el primer correo tendrá que andar x leguas, y como recorre m leguas por hora, las andará en $\frac{x}{m}$ horas.

El segundo correo tendrá que andar $x-a$ leguas, y como recorre n leguas por hora, empleará $\frac{x-a}{n}$ horas para andarlas, y como el tiempo empleado por los dos correos debe ser el mismo, la cuestión quedará planteada en la ecuación:

$$\frac{x}{m}=\frac{x-a}{n}$$

de la que

$$x=\frac{ma}{m-n}$$

ECUACIONES DETERMINADAS DE PRIMER GRADO CON VARIAS INCÓGNITAS.

271.—ELIMINACIÓN.—Sucede á menudo en las cuestiones de Algebra que las cantidades desconocidas son más de una, y entonces pueden ocurrir dos casos: haber igual número de ecuaciones que de incógnitas, ó tener mayor número de incógnitas que de ecuaciones. Cuando se tienen tantas ecuaciones como incógnitas, se dice que el problema es *determinado*, porque empleando los procedimientos que vamos á explicar, cada incógnita no tiene más que un solo valor. Al contrario, cuando se tiene menor número de ecuaciones que de incógnitas, el problema es *indeterminado*, esto es, las incógnitas podrán tener varios ó una infinidad de valores. En efecto, en el último caso, dando valores arbitrarios á todas las incógnitas menos á una, la resolución de la ecuación que contiene esta incógnita, da para ella un valor correspondiente á los valores arbitrarios dados á las otras incógnitas; y se concibe que pudiendo variar al infinito los valores arbitrarios, se tendrá así una infinidad de resoluciones para cada incógnita. Este número infinito de resoluciones se limita por alguna condición, como que los números sean enteros, positivos, ó menores que una cantidad dada, etc.

Se llama *sistema de ecuaciones el conjunto de las que se establecen para determinar el valor de las incógnitas.* Así un sistema de ecuaciones para ser determinado, debe constar de tantas ecuaciones como incógnitas, y todo sistema de ecuaciones es el resultado de plantear un problema.

Se llama eliminar una incógnita, hacerla desaparecer del sistema de ecuaciones.

Si de un sistema de ecuaciones con varias incógnitas se va eliminando sucesivamente cada una de ellas, se llega á obtener una sola ecuación con una incógnita, en la cual, conforme á las reglas dadas, es fácil determinar su valor expresado en cantidades conocidas.

Tenemos tres métodos de eliminación: 1.º por *igualación*, 2.º por *sustitución*, y 3.º por *reducción*, llamado también por *adición y sustracción*. Vamos á explicar en qué consiste cada uno de ellos.

272.—MÉTODO DE IGUALACIÓN Ó DE COMPARACIÓN.—*Se sacará de cada ecuación el valor de una misma incógnita como si las demás fuesen conocidas; y en seguida se igualarán estos valores de dos en dos formando tantas ecuaciones como incógnitas quedan, con lo que el sistema primitivo de ecuaciones se habrá reducido á otro con una ecuación y una incógnita menos: despejando en el 2.º sistema de ecuaciones una misma incóg-*

nita, é igualando sus valores, se eliminará la 2.ª incógnita y continuando bajo el mismo método, se llegará á determinar el valor de la última incógnita en función de cantidades conocidas. Este valor se sustituirá en uno de los dos valores de la penúltima incógnita para obtener el de ésta: sustituyendo los valores de estas dos incógnitas en cualquiera de los tres de la antepenúltima incógnita, se determinará el de ésta, y así retrogradando se obtendrá el de todas las incógnitas.

Un ejemplo aclarará esta regla:

Si tenemos las ecuaciones: $5x-3y=1$, $7y-4x=13$...... (1)

Despejando á x en las dos ecuaciones se tiene:

$$\text{de la 1.ª } x=\frac{1+3y}{5}$$

$$\text{de la 2.ª } x=\frac{7y-13}{4}$$

igualando estos valores se tiene $\frac{1+3y}{5}=\frac{7y-13}{4}$........... (2)

Se ve que el sistema (1) de dos ecuaciones con dos incógnitas se ha reducido á una ecuación con una sola incógnita. Despejando á y en la ecuación [2] se tiene:

quitando los denominadores $12y+4=35y-65$

trasladando $65+4=35y-12y$

reduciendo y despejando $y=\frac{69}{23}=3$

Una vez determinado el valor de y, para obtener el de x sustituiremos este en cualquiera de los dos valores de x. Tomaremos el 1.º

$$x=\frac{3y+1}{5}=\frac{3\times3+1}{5}=2$$

El sistema de las dos ecuaciones propuestas resuelto da $x=2$, $y=3$,

Sea como segundo ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x+5y-3z=3 \\ 3\,x-4y+\ z=-2 \\ 5\,x-y+2z=9 \end{array}\right\}\text{........[1]}$$

Despejando á $x=\frac{3-5y+3z}{2}\quad x=\frac{4y-z-2}{3}\quad x=\frac{9+y-2z}{5}$

Igualando estos valores se tendrá un sistema de dos ecuaciones

$$\frac{3-5y+3z}{2}=\frac{4y-z-2}{3},\qquad \frac{3-5y+3z}{2}=\frac{9+y-2z}{5}$$

Quitando los denominadores en cada una de las dos ecuaciones se tiene:

$9-15y+9z=8y-2z-4,\quad 15-25y+15z=18+2y-4z\ldots\ldots..(2)$
$9+4+9z+2z=8y+15y,\quad 15-18+15z+4z=2y+25y$
Reduciendo $13+11z=23y,\quad -3+19z=27y$

Despejando á y $\quad y=\frac{13+11z}{23}\quad y=\frac{19z-3}{27}$

Igualando estos dos valores habremos reducido el sistema (2) de dos ecuaciones y dos incógnitas al de una ecuación y una sola incógnita.

$$\frac{13+11z}{23}=\frac{19z-3}{27}\ldots\ldots..\ (3)$$

Quitando los denominadores $\quad 27\times13+27\times11z=23\times19z-23\times3$
Ejecutando las operaciones $\quad 351+297z=437z-69$
Trasladando $\quad 351+69=437z-297z$
Reduciendo $\quad 420=140z$
Despejando $\quad z=\frac{420}{140}=3$

Una vez obtenido el valor de $z=3$ lo sustituiremos en cualquiera de los valores de y. Tomaremos el primero:

$$y=\frac{13+11z}{23}=\frac{13+33}{23}=\frac{46}{23}=2$$

Los valores de $z=3$, $y=2$, los sustituiremos en cualquiera de los valores de x. Tomando el primero:

$$x=\frac{3-5y+3z}{2}=\frac{3-10+9}{2}=\frac{2}{2}=1$$

y los de $x=1$, $y=2$, $z=3$ resolverán el sistema propuesto de tres ecuaciones y tres incógnitas.

273.—Sustitución.—*El método de sustitución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones, considerando, las demás incógnitas como cantidades conocidas: el valor de esta incógnita se sustituirá en todas las demás ecuaciones; reduciéndose así el sistema primitivo de ecuaciones á otro con una ecuación y una incógnita menos. En seguida se despejará otra incógnita, considerando las demás como cantidades conocidas, y su valor se sustituirá en el resto de las ecuaciones, eliminándose así la segunda incógnita y reduciéndose el sistema de ecuaciones á otro con una ecuación y una in-*

cógnita menos. Continuando este procedimiento se llega por último á no tener mas que una ecuación con una incógnita; de la cual se obtendrá el valor de la última incógnita en función de cantidades conocidas. Para determinar el de las otras incógnitas, se sustituirá el valor de la última incógnita en el de la penúltima, y así se irá retrogradando hasta obtener el valor de la primera incógnita.

Sea como primer ejemplo: $\left.\begin{matrix} x+y=s \\ x-y=d \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

despejando á x $\quad x=s-y$

sustituyéndolo en la segunda ecuación tendremos reducido el sistema (1) de dos ecuaciones y dos incógnitas, al de una ecuación con una incógnita.

$$s-y-y=d \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$$

$$s-2y=d$$

despejando á y $\quad y=\frac{s-d}{2}$

Obtenido el valor de y, para determinar el de x sustituiremos el valor de y en el de x.

$$x=s-y=s-\frac{s-d}{2}=\frac{2s-s+d}{2}=\frac{s+d}{2}$$

Como resultado final tenemos:

$$x=\frac{s+d}{2}, \quad y=\frac{s-d}{2}$$

fórmulas que comprueban el principio demostrado [226.—V] que conocida la suma y la diferencia entre dos cantidades, la mayor es igual á la mitad de la suma más la mitad de la diferencia, y la menor es igual á la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

Sea como 2.º ejemplo el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 2x+5y-3z=3 \\ 3x-4y+z=-2 \\ 5x-y+2z=9 \end{matrix}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots [1]$$

Despejando á x de la primera ecuación:

$$x=\frac{3-5y+3z}{2}$$

Sustituyendo en la 2.ª y 3.ª ecuación se tiene convertido el sistema de tres ecuaciones en otro de dos con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l} 3\times\dfrac{3-5y+3z}{2}-4y+z=-2 \\ 5\times\dfrac{3-5y+3z}{2}-y+2z=9 \end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Quitando los denominadores y reduciendo estas ecuaciones se transformarán en:

$$-23y+11z=-13$$
$$-27y+19z=3$$

Despejando á y en la 1.ª se tiene:

$$y=\frac{11z+13}{23}$$

Sustituyendo este valor en la 2.ª se reducirá el sistema de dos ecuaciones al de una sola incógnita z.

$$-27\times\frac{11z+13}{23}+19z=3\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Quitando el denominador

$$-27\times 11z-27\times 13+23\times 19z=23\times 3$$
$$-297z-351+437z=69$$
$$140z=420$$

De donde

$$z=\frac{420}{140}=3$$

Obtenido el valor $z=3$ determinaremos el de y sustituyéndolo en el de esta incógnita.

$$y=\frac{11z+13}{23}=\frac{11\times 3+13}{23}=2$$

Los valores de $z=3$, $y=2$, los sustituiremos en el de

$$x=\frac{3-5y+3z}{2}=\frac{3-10+9}{2}=1$$

Los valores $x=1$, $y=2$ y $z=3$ resuelven el sistema de ecuaciones (1) como es fácil comprobarlo sustituyendo estos números y ejecutando las operaciones.

274.—Método de eliminación por reducción, ó por adición y sustracción.—*El método de eliminación por reducción, llamado comunmente por adición y sustracción, consiste en hacer que una incógnita tenga el mismo coeficiente en dos ecuaciones, las cuales se suman cuando los términos que con-*

tienen la incógnita que se quiere eliminar tienen signos contrarios, y se restan cuando estos términos llevan el mismo signo. Para hacer que los términos que contienen la incógnita que se quiere eliminar tengan el mismo coeficiente, por regla general se multiplican todos los términos de la 1.ª ecuación por el coeficiente de la incógnita en la 2.ª ecuación, y todos los términos de la 2.ª ecuación se multiplican por el coeficiente de la incógnita en la 1.ª ecuación: cuando estos coeficientes no son primos, se forma su menor múltiplo común y se multiplica cada ecuación por el cociente que resulta de dividir el menor múltiplo por el coeficiente de la incógnita en cada ecuación. Para proceder á eliminar las incógnitas por el método de adición y sustracción, se comienza por quitar los denominadores cuando los hay; en seguida se compara una ecuación con todas las demás, eliminando según se ha explicado, una misma incógnita, con lo que se obtendrá una ecuación y una incógnita menos. En la ecuación que quede al fin se determinará el valor de la última incógnita.

Este valor se sustituirá en una de las dos ecuaciones que contienen dos incógnitas, y se despejará la penúltima incógnita. Conocidos los valores de dos incógnitas, se sustituirán en una de las ecuaciones que contiene tres incógnitas y se despejará la 3.ª incógnita; y se continuará retrogradando y sustituyendo los valores conocidos de las incógnitas hasta llegar á determinar el de todas

Algunos ejemplos aclararán esta regla.

Sean las ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x-2y=a \\ 4x+5y=b \end{array}\right\} \dots\dots\dots\dots (1)$$

Multiplicando la 1.ª por 4 $\quad 12x-8y=4a$

Idem la 2.ª por 3 $\quad 12x+15y=3b$

Restando la 2.ª de la 1.ª $\quad -8y-15y=4a-3b \dots\dots\dots (2)$

Reduciendo, $\quad -23y=4a-3b$

Cambiando signos y despejando $\quad y=\dfrac{3b-4a}{23}$

Una vez conocido el valor de y lo sustituiremos en la ecuación:

$$3x-2y=a$$

$$3x-2\times\frac{3b-4a}{23}=a$$

Quitando el denominador $\quad 3\times23x-6b+8a=23a$

$$69x=15a+6b$$

Despejando á x $\quad x=\dfrac{15a+6b}{69}$

este valor y el de $y=\frac{3b-4a}{23}$

resuelven el sistema de ecuaciones propuesto.

Tomemos como segundo ejemplo las ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}2x+5y-3z=3\\3x-4y+z=-2\\5x-y+2z=9\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Eliminaremos primero x entre la primera y la segunda ecuación, y luego entre la primera y la tercera, haciendo que x tenga el mismo coeficiente.

Multiplicando la primera por 3	$6x+15y-9z=9$
Idem la segunda por 2	$6x-8y+2z=-4$
Restando la segunda ecuación	$23y-11z=13\ldots\ldots\ldots\ldots(a)$
Multiplicando la primera por 5	$10x+25y-15z=15$
Idem la tercera por 2	$10x-2y+4z=18$
Restando la 2.ª ecuación	$27y-19z=-3\ldots\ldots\ldots\ldots(b)$

El sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas se ha reducido al sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$\left.\begin{array}{l}23y-11z=13\\27y-19z=-3\end{array}\right\}\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Multiplicando la primera por 27	$27\times23y-297z=351$
Idem la segunda por 23	$23\times27y-437z=-69$
Restando la última ecuación	$140z=420\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

Despejando á z $\qquad z=\frac{420}{140}=3$

Obtenido el valor de $z=3$, lo sustituiremos en la primera ecuación del sistema (2) y tendremos:

$$23y-11\times3=13$$

Despejando á y $\qquad y=\frac{13+33}{23}=2$

Sustituiremos ahora los valores de $z=3$, é $y=2$, en la primera ecuación del sistema (1)

$$2x+5y-3z=3$$

lo que dará $\qquad 2x+10-9=3$

Despejando á x $\qquad x=\frac{3+9-10}{2}=1$

Los valores de $x=1$, $y=2$, $z=3$ resuelven el sistema propuesto de ecuaciones con tres incógnitas.

Ejercicios.—Por cada uno de los tres métodos de eliminación resuélvanse los siguientes sistemas de ecuaciones.

$$ax+by=m$$
$$a'x+b'y=m'$$

R. $x=\dfrac{mb'-bm'}{ab'-ba'}$ $\qquad y=\dfrac{am'-ma'}{ab'-ba'}$

$$10x-13y=41$$
$$7x-11y=23$$

R. $x=8$; $y=3$

$$1071x+224=1421y$$
$$819x-1127y+938=0$$

R. $x=25$, $y=19$.

$$5x-3y+2z=19$$
$$4x+5y-3z=31$$
$$3x+7y-4z=31$$

R. $x=5$, $y=4$, $z=3$

$$3x+2u-5y=27$$
$$3x+y-4u=9$$
$$x+7z-6y=33$$
$$5z-2x-8y+2u=15$$

R. $x=6$, $y=-1$, $z=3$, $u=2$.

275.—Problemas.—Para plantear los problemas que contienen varias incógnitas, se aplica la regla dada en el número 264: se expresan por x, y, z, etc., las incógnitas, y se indican las operaciones que se ejecutarían con los números conocidos para comprobar que satisfacían las condiciones del problema; debiendo establecerse por la comparación de los resultados con los datos de la cuestión tantas ecuaciones como incógnitas hay.

Mucho más que las reglas, la práctica enseñará cuál de los métodos de eliminación es más adecuado á cada caso; sin embargo, diremos que el de sustitución se emplea de preferencia cuando una incógnita no entra en todas las ecuaciones, y cuando no lleva coeficiente; y el de adición y sustracción tiene la ventaja de evitar la operación de quitar los denominadores, tan frecuente en los otros dos métodos.

I.—Una persona tiene cierto número de fichas en sus manos; si pasa una de la derecha á la izquierda, resulta que tiene igual número en cada mano, pero si pasa dos de la izquierda á la derecha, tendrá en ésta doble que en la otra; se pregunta: ¿cuántas fichas tiene en cada mano?

Si x representa las fichas de la mano derecha, é y las de la izquierda, el problema quedará planteado en las ecuaciones:

$$x-1=y+1 \qquad x+2=2\,[y-2]$$

Emplearemos el método de sustitución. Despejando x en la primera ecuación $x=y+2$

sustituyéndolo en la segunda $y+2+2=2y-4$

trasladando $8=y$

Sustituyendo este valor en $x=y+2=8+2=10$

La persona tendrá en la mano derecha 10 fichas, y 8 en la izquierda.

II.—Se han comprado tres alhajas cuyo precio se quiere conocer: se sabe que el de la primera más la mitad del precio de las otras dos forma 25 onzas; el precio de la segunda más la tercera parte del precio de la primera y de la tercera forman 26; y el precio de la tercera más la mitad del precio de las otras dos forman 29 onzas.

Llamando x el precio de la primera, y el de la segunda, y z el de la tercera, el problema se planteará en el sistema de las tres ecuaciones siguientes:

$$x+\tfrac{1}{2}(y+z)=25, \quad y+\tfrac{1}{3}(x+z)=26, \quad z+\tfrac{1}{2}(x+y)=29.$$

Seguiremos el método de igualación. Despejando á x en cada una de las ecuaciones tendremos:

$$x=\frac{50-y-z}{2} \quad x=78-3y-z \quad x=58-2z-y$$

$$\frac{50-y-z}{2}=78-3y-z \quad \frac{50-y-z}{2}=58-2z-y$$

Despejando á $y=\dfrac{106-z}{5}$ $\qquad y=66-3z$

Igualando $\qquad \dfrac{106-z}{5}=66-3z$

Despejando $\qquad z=16$

Sustituyendo en el valor de $y=66-3z=66-3\times16=18$

Sustituyendo en el valor de $x=\dfrac{50-y-z}{2}=\dfrac{50-18-16}{2}=8$

Los valores de $x=8$, $y=18$, $z=16$ resuelven la cuestión.

III.—Se tienen tres chorros de agua para llenar un depósito. Los dos primeros juntos producen 175 litros de agua en tres horas y media:

el primero y el tercero dan 280 litros en cuatro horas: el segundo y el tercero dan 375 litros en seis horas y cuarto. Se quiere saber: 1º ¿cuánto producirá cada chorro por hora? y 2º siendo la capacidad del depósito de 18 metros cúbicos ¿en cuánto tiempo se llenará entrándole los tres chorros reunidos?

Sean x, y, z, los litros de agua producidos por cada chorro en una hora, y se tendrán las tres ecuaciones

$$(x+y)\ 3\tfrac{1}{2}=175$$
$$(x+z)\ 4\ =280$$
$$(y+z)\ 6\tfrac{1}{4}=375$$

de las que se obtiene: $x=30$, $y=20$, $z=40$.

Los tres chorros juntos dan en una hora $30+20+40=90$ litros; y por consiguiente, para llenar el depósito se necesitará $\frac{18000}{90}$ lit. $=200$ horas.

IV.—Un número que consta de tres cifras es tal, que la suma de las tres cifras que lo forman da 16: invirtiendo el orden de las cifras si se suma el número dado con el número invertido, se obtiene 1211; y si se resta del número invertido se obtiene 297. ¿Cuál es el número?

Sea x la cifra que expresa las centenas, y las decenas, y z las unidades: se tendrá para expresar el número $100x+10y+z$, y el número invertido será $100z+10y+x$; las condiciones del problema conducen al establecimiento de las tres ecuaciones:

$$x+y+z=16$$
$$(100z+10y+x)+(100x+10y+z)=1211$$
$$(100z+10y+x)-(100x+10y+z)=\ 297$$

Resolviendo estas ecuaciones se obtiene:

$$x=4,\ y=5\ \ z=7$$

El número pedido es: 457.

V.—Un comerciante tiene vinos de cuatro clases diferentes.

Haciendo una mezcla compuesta de 2 litros de la primera, 3 litros de la segunda, 5 litros de la tercera y 10 litros de la cuarta, el litro de la mezcla resulta á razón de $2‘10.

De una segunda mezcla compuesta de 7 litros de la primera, 8 litros de la segunda, 10 litros de la tercera y 15 litros de la cuarta, resulta el litro á razón de $2‘20.

De una tercera mezcla compuesta de 10 litros de la primera, 5 litros de la segunda, 15 de la tercera y 20 de la cuarta, resulta el litro á razón de $2‘24.

En fin, de una cuarta mezcla formada de 18 litros de la primera, 17 litros de la segunda, 40 de la tercera y 25 de la cuarta, resulta el litro á razón de \$2'29.

Se quiere saber el precio de cada clase de vino.

Sean x, y, z, u, los precios de la 1ª, 2ª, 3ª y 4ª clase de vino.

La primera mezcla se compone de $2+3+5+10=20$ litros á \$2'10 y cuesta 42 pesos.

La segunda mezcla, compuesta de $7+8+10+15=40$ litros á \$2'20, vale 88 pesos.

La tercera mezcla, de $10+5+15+20=50$ litros á \$2'24, vale 112 pesos.

Por último, la cuarta mezcla, compuesta de $18+17+40+25=100$ litros á \$2'29, cuesta 229 pesos.

Con tales datos, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$2x+3y+5z+10u=42$$
$$7x+8y+10z+15u=88$$
$$10x+5y+15z+20u=112$$
$$18x+17y+40z+25u=229$$

De las que se obtiene:

$$x=3,\ y=2,\ z=2'4 \text{ y } u=1'6$$

DESIGUALDADES.

276—Transformaciones de las desigualdades.—*Se llama desigualdad la expresión que indica que dos cantidades tienen valores diferentes.*

Estas expresiones se indican por medio del signo $>$ ó $<$, poniendo la cantidad mayor del lado de la abertura, y la menor del lado del vértice del signo.

$$a>a-b, \qquad a<a+b$$

se lee a mayor que $a-b$; y a menor que $a+b$.

Muchas cuestiones dependen de este género de relaciones, y por tanto, importa conocer las transformaciones que pueden sufrir subsistiendo la desigualdad. La principal dificultad de estas transformaciones procede de la introducción en los cálculos de las cantidades negativas;

pero habiendo muchos casos en Algebra y en Geometría que se resuelven haciendo uso de las desigualdades, es necesario conocer el fundamento de tales transformaciones para saber cuándo se podrán efectuar y en qué casos no.

Toda desigualdad $a>b$ debe concebirse como un símbolo de la ecuación $a=b+x$ en la que x expresa la diferencia entre las cantidades a y b. Si se tiene $b<a$, esto equivale á la ecuación $b=a-x$, en la que x indica también la diferencia entre a y b; siendo de notarse que no obstante que se conoce el sentido de la desigualdad, el valor de la diferencia, que hemos representado por x, se desconoce y no siempre se puede determinar con precisión. Por ejemplo, puede ponerse que la suma es mayor que varios sumandos, aun cuando se desconozca el valor de los demás sumandos; el producto de dos quebrados propios es menor que uno de ellos y no se necesita conocer el valor de la diferencia entre uno de los factores y el producto para establecer la respectiva desigualdad.

1º *Si se agrega ó se quita una misma cantidad á los dos miembros de una desigualdad, ésta subsistirá en el mismo sentido.*

Sea $\qquad \mathrm{A}>a \qquad$ desigualdad que equivale á la ecuación
$\qquad \mathrm{A}=a+d, \qquad$ representando d la diferencia desconocida.

Agregando h á los miembros de esta ecuación, se tiene:

$$\mathrm{A}+h=a+h+d$$

y como la suma total es mayor que la de varios sumandos, se infiere que

$$\mathrm{A}+h>a+h$$

Este resultado demuestra que la desigualdad no se ha alterado agregando h á sus dos miembros.

Sea ahora, $\qquad \mathrm{A}>a$, que equivale á $\mathrm{A}=a+d$

Quitando h á los dos miembros de la ecuación: $\mathrm{A}-h=a-h+d$; como al suprimir d en el segundo miembro de esta ecuación, lo hacemos *menor*, se infiere que $\qquad \mathrm{A}-h>a-h$

resultado que demuestra que una desigualdad no se altera cuando se quita á sus miembros una misma cantidad.

2º *En toda desigualdad, se puede trasladar cualquier término de un miembro á otro, con signo contrario.*

Sea la desigualdad $\qquad a+b-c>d$

Supuesto que una desigualdad no se altera cuando se agrega ó se quita una cantidad á sus dos miembros, podremos restarles b y agregarles c, y se tendrá

$$a+b-c-b+c>d-b+c$$

reduciendo se tiene $a>d-b+c$

comparando esta desigualdad con la primera se ve que las cantidades b y c han pasado al segundo miembro de la desigualdad con signo contrario.

3º *Una desigualdad subsiste en el mismo sentido cuando se multiplican sus dos miembros por una cantidad positiva.*

Sea $A>a$, dándole la forma $A=a+d$

si se multiplican sus dos miembros por m, se tiene: $Am=am+dm$,

luego $Am>am$,

que era lo que se debía demostrar.

4º *Si se multiplican por una cantidad negativa los dos miembros de una desigualdad, ésta resultará en sentido inverso.*

Sea $A>a$ equivalente á $A=a+d$

multiplicando por $-m$ la ecuación, se tiene: $-Am=-am-dm$, como hacer desaparecer $-dm$ en el segundo miembro de esta ecuación equivale á agregar $+dm$, lo haremos *mayor*, y por tanto

$$-Am<-am$$

Se ve que la desigualdad resulta en sentido contrario de la primera.

5º *Para quitar los denominadores de los términos de una desigualdad, se procederá lo mismo que en las ecuaciones cuando el denominador ó múltiplo común de los denominadores sea positivo:* supuesto que esta operación está fundada en multiplicar todos los términos de la expresión por un mismo número, y acabamos de demostrar que se pueden multiplicar los miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, sin cambiar de sentido. Cuando el múltiplo común de los denominadores sea negativo, es preciso invertir el sentido de la desigualdad, y cuando exprese una diferencia, como $b-c$, para quitar los denominadores es preciso tener la seguridad de que es $b>c$ ó de que $b<c$.

6º *Para cambiar el signo á todos los términos de una desigualdad, es necesario invertir el sentido de esta.*

Porque el cambio de signos equivale á multiplicar todos los términos por—1, y se ha visto que cuando se multiplican los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, resulta en sentido inverso. Esta propiedad constituye una diferencia característica entre las transformaciones de las ecuaciones y las de las desigualdades.

7° *Si se dividen los dos miembros de una desigualdad por una cantidad positiva, la desigualdad subsiste en el mismo sentido.*

Sea $A>a$, que equivale á $A=a+d$.

Dividiendo los términos de la ecuación por m: $\frac{A}{m}=\frac{a}{m}+\frac{d}{m}$

luego $$\frac{A}{m}>\frac{a}{m}$$

8° *Si se dividen los dos miembros de una desigualdad por una cantidad negativa, la desigualdad resultará en sentido inverso.*

Sea $A>a$ que equivale á $A=a+d$

Dividiendo los términos de la ecuación por—m: $-\frac{A}{m}=-\frac{a}{m}-\frac{d}{m}$

luego $$-\frac{A}{m}<-\frac{a}{m}$$

De estos dos principios se deduce que: *en las desigualdades, toda cantidad que está como factor en un miembro, puede pasar como divisor al otro; observando que cuando el factor es positivo, la desigualdad subsiste en el mismo sentido; que cuando el factor es negativo, la desigualdad resulta en sentido contrario, y cuando el factor expresa una diferencia, deberá averiguarse previamente el signo del resultado de dicha diferencia.*

9.° *Cuando se tienen varias desigualdades en el mismo sentido, se pueden sumar ordenadamente; resultando una desigualdad en el mismo sentido.*

Si se tiene $A>a$, que equivale á $A=a+d$
$A'>a'$ „ „ $A'=a'+d'$
resultará: $A+A'>a+a'$; porque $A+A'=a+a'+(d+d')$

10.°—*Dos desigualdades en el mismo sentido no se deben restar, porque no es posible determinar el sentido de la desigualdad que resulte.*

Sean $A>a$ que equivale á $A=a+d$
y $A'>a'$ „ „ $A'=a'+d'$
restando la 2.ª ecuación de la 1.ª se tiene: $A-A'=a-a'+d-d'$

En la que A—A' podrá ser igual, mayor ó menor que $a-a'$, según sea el valor de $d-d'$, que es desconocido.

Si $d-d'=0$ resultará $A-A'=a-a'$
Si $d-d'>0$ resultará $A-A'>a-a'$
Y si $d-d'<0$ se tendrá $A-A'<a-a'$

11º—*Se pueden restar dos desigualdades establecidas en sentido diferente, conservando la desigualdad resultante el sentido de la desigualdad cuyos miembros han servido de minuendos.*

Sean $A>a,$ esto es, $A=a+d$
y $a'<A'$ „ $a'=A'-d'$
restando la 2ª ecuación de la 1ª: $A-a'=a-A'+d+d'.$
luego $A-a'>a-A'$

12º—*Varias desigualdades establecidas en el mismo sentido, se pueden multiplicar ordenadamente cuando los términos que las forman son positivos; pero no se deberán multiplicar cuando alguno sea negativo.*

Sea $a<A$ que equivale á $A=a+d$
y $b<B$ „ „ $B=b+d'$

multiplicando las ecuaciones $AB=ab+bd+ad'+dd'$
luego $ab<AB$

pero no podrán multiplicarse las desigualdades cuando estén establecidas en sentido contrario, ni tampoco cuando entren en los factores cantidades negativas; pues el sentido de la desigualdad dependerá del valor de las cantidades que se consideren en cada caso.

De esto se deduce que: *cuando los miembros de una desigualdad son cantidades positivas, pueden elevarse á cualquier potencia.*

13º—*Se pueden dividir dos desigualdades establecidas en sentido contrario, debiendo conservar la desigualdad resultante el sentido de la de los miembros que han servido de dividendos,*

Sea $A>a$ que equivale á $A=a+d$
y $a'<A'$ „ „ $a'=A'-d'$

dividiendo ordenadamente las ecuaciones: $\frac{A}{a'}=\frac{a+d}{A'-d'}$

pero como conforme á los principios fundamentales del cálculo de los quebrados (141)

$$\frac{a+d}{A'-d'} > \frac{a+d}{A'}, \text{ y } \frac{a+d}{A'} > \frac{a}{A'}, \text{ con más razón } \frac{a+d}{A'-d'} > \frac{a}{A'}$$

luego $\frac{A}{a'} > \frac{a}{A'}$ que es lo que se debía demostrar.

Daremos esta demostración de otra manera.

Sean $$A > a$$
y $$a' < A'$$

Como mientras mayor sea el dividendo siendo uno mismo el divisor tanto mayor será el cociente, tendremos dividiendo la primera desigualdad por a' que

$$\frac{A}{a'} > \frac{a}{a'}$$

y como mientras mayor sea el divisor siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el cociente, si dividimos a por los miembros de la desigualdad $a' < A'$, tendremos:

$$\frac{a}{a'} > \frac{a}{A'}$$

luego si $$\frac{A}{a'} > \frac{a}{a'} \text{ y } \frac{a}{a'} > \frac{a}{A'},$$

se infiere que $$\frac{A}{a'} > \frac{a}{A'}$$

que es lo que se debía demostrar.

277.—En resumen: *una desigualdad no se altera cuando se agrega ó quita á sus dos miembros una misma cantidad, ó cuando se multiplican ó dividen por una cantidad positiva; se pueden trasladar de un miembro á otro los términos con signo contrario; se pueden quitar los denominadores y los factores como en las ecuaciones, cuando son positivos; pero cuando hay que multiplicar ó dividir los términos de una desigualdad por una cantidad negativa, ó cuando se cambian todos los signos, es necesario invertir el sentido de la desigualdad; cuando los miembros de ésta son positivos, se pueden elevar á una potencia sin variar el sentido de la desigualdad; cuando se tienen varias desigualdades establecidas en el mismo sentido, se pueden sumar ordenadamente y multiplicarlas cuando sus miembros son positivos; pero para restar ó dividir las desigualdades, es preciso que estén en sentido con-*

trario, conservando la desigualdad resultante el sentido de la de los miembros que sirven de minuendos ó de dividendos.

278. —*Valores límites.*—Cuando se tienen varias desigualdades que contienen la misma incógnita, cada una de ellas da un límite al valor de la incógnita, y pueden presentarse tres casos: 1º, estos límites pueden estar en el mismo sentido, como $x>5$, $x>8$, y en este caso, por ejemplo, la primera condición es supérflua por estar comprendida en la segunda $x>8$: 2º, pueden estar indicados los límites en sentido opuesto, como $x>10$, $x<20$, y entonces x no podrá tener sino los valores intermedios entre 10 y 20: 3º, puede suceder, por último, que los límites de los valores se excluyan unos á otros como $x<15$, $x>20$, y en este caso, el problema es absurdo supuesto que envuelve condiciones contradictorias.

279.—Cantidades negativas.—Si en la expresión $y=a-x$ se supone que x es una cantidad variable, susceptible de tener diversos valores, se verá que y tendrá valores correlativos á los que se den á x. Si esta cantidad aumenta, el valor de y disminuirá, y al contrario, si el valor de x disminuye, el de y aumentará. Así, pues, tendremos:

1º: si $x<a$, será positivo el valor de $y=a-x$
2º: si $x=a$, se tendrá $y=0$
3º: si $x>a$, será negativo y $-y=a-x$

Si en la 1ª desigualdad $x<a$, condición que hace el valor de y positivo, pasamos x al segundo miembro, tendremos:

$$0<a-x$$

esto es $$0<y$$

lo que significa que cuando una cantidad es mayor que 0 es positiva.

Si en la 3ª desigualdad $x>a$, condición que hace negativo á y; pasamos x al segundo miembro, tendremos:

$$0>a-x$$

esto es $$0>-y$$

luego cuando una cantidad es negativa será menor que cero.

Adoptando estos resultados como símbolos de las cantidades positivas y negativas, se ve que podemos considerar *las cantidades positivas como expresiones cuyo valor es mayor que cero, y las negativas como menores que cero,* lo cual es una convención útil, y que proporciona facilidad para ejecutar los cálculos.

280.—Problemas.—Como ejercicio resolveremos las siguientes cuestiones:

I.—*¿Cuál es el número mayor que 15; cuyo triple más 1 es menor que su duplo más 20; y tal además que si se quita 1 al número y esta diferencia se divide por la suma del mismo con 3 el cociente sea mayor que $\frac{4}{5}$?*

En virtud de estas condiciones estableceremos las siguientes desigualdades:

$$x>15, \qquad 3x+1<2x+20 \qquad \frac{x-1}{x+3}>\frac{4}{5}$$

trasladando en la 2ª $\quad 3x-2x<20-1 \quad$ da $x<19$
quitando los denominadores en la 3ª $\quad 5x-5>4x+12$
trasladando $\quad 5x-4x>12+5, \quad$ lo que da $x>17$

En consecuencia, el valor de x debe satisfacer las siguientes condiciones:

$$x>15, \qquad x<19, \qquad \text{y } x>17.$$

De estas condiciones la 1ª está comprendida en la última y todos los números comprendidos entre 17 y 19, satisfarán el problema, lo que da un número infinito de resoluciones, pudiendo hacerse $x=17\frac{1}{2}$, $17\frac{3}{4}$, $17\frac{2}{3}$, $17\frac{5}{8}$, etc.; pero si se agrega la condición de que el valor de x sea número entero, sólo tendrá una resolución: $x=18$. Valor que en efecto es mayor que 15; $3\times18+1$ es menor que $2\times18+20$; y por último, $18-1$ partido por $18+3$ da por cociente $\frac{17}{21}$ que es una fracción mayor que $\frac{4}{5}$!

II.—*Se tiene una máquina de vapor que se alimenta con leña que es comprada en el monte á razón de 6 centavos la carga; cuesta el flete de la carga de leña del monte al establecimiento donde funciona la máquina 50 centavos, y queriendo reemplazar la leña por carbón de piedra, se trata de determinar la distancia máxima á que tendría cuenta encontrar una mina, bajo el supuesto de que la carga de carbón de piedra cueste en la boca de la mina 20 centavos, y su flete cueste á razón de 12 centavos la carga por legua, habiéndose determinado por la experiencia que 75 cargas de leña producen el mismo efecto que 28 cargas de carbón de piedra.*

	Leña.	Carbón de piedra.
Costo de la carga	6 cs.,	20 cs.
Flete de idem	50 „	12x „
Cargas que se necesitan	75 „	28 „

Supuesto que 75 cargas de leña producen el mismo efecto que 28 de carbón, es preciso que el costo total de estas últimas sea menor que el de 75 cargas de leña para que pueda tener cuenta la explotación de la mina de carbón de piedra; y esta condición, llamando x las leguas de distancia de la mina al establecimiento, da lugar á la siguiente desigualdad:

$$28\ (20+12x)<75(6+50)$$

Ejecutando las multiplicaciones indicadas

$$560+336x<450+3750$$

Trasladando y reduciendo: $336x<4200-560$

Despejando $x<\frac{3640}{336}$

$$x<10'83 \text{ leguas.}$$

En consecuencia, es preciso que la distancia de la mina conforme á las condiciones del problema no pase de 10'83 leguas. En efecto, por comprobación supondremos que la distancia sea de 11 leguas.

28 cargas de carbón á 20 cs., costarán en la mina......	$	5'60
Flete de 28 cargas por 11 leguas á 12 cs. por legua	$	36'96
Costo del carbón	$	42'56
75 cargas de leña á 56 cs., costarán	$	42'00

precio inferior al del carbón de piedra cuando éste se encuentra á la distancia de 11 leguas.

ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO.

281.—Consideraciones generales sobre las ecuaciones indeterminadas de primer grado.—Hemos visto que en los problemas que dan lugar á una ecuación de primer grado con una sola incógnita, ó á un sistema de ecuaciones con tantas incógnitas como ecuaciones, no se obtiene para cada incógnita más que *un solo valor* y por esto se les llama problemas *determinados.* Ahora vamos á ocuparnos en los *problemas indeterminados, que son aquellos cuyas condiciones dan lugar á un número de ecuaciones menor que el de incógnitas.*

Por ejemplo, si se pide cuáles son dos números cuya suma sea igual á 30, el problema se planteará en la siguiente ecuación:

$$x+y=30$$

que contiene dos incógnitas. Si se despeja á una de ellas, se tiene:

$$x=3-y$$

en la que si se da un valor arbitrario á y se obtendrá otro relativo para x. Así, si se hace:

$y=1$, se obtendrá $x=29$. Si hacemos $y=2$, resulta $x=28$.

Si $y=2\frac{1}{2}$, $x=27\frac{1}{2}$; y cada uno de estos sistemas de valores correlativos satisfará las condiciones del problema de dar dos números cuya suma es 30.

Además, debe observarse que si se da á y cualquiera clase de valores, enteros ó fraccionarios, positivos ó negativos, el número de valores que pueden obtenerse para x será infinito. Sin embargo, *unas veces por la naturaleza de la cuestión, otras para limitar el número de resoluciones de un problema indeterminado, se fija la condición de que los valores de las incógnitas han de ser precisamente números enteros y positivos.*

Cuando no se tiene más que una ecuación y dos incógnitas, si se quitan los denominadores, y se pasan al primer miembro los términos que contienen á las incógnitas, y al segundo las cantidades conocidas, la ecuación en su forma más general será:

$$\pm ax \pm by = \pm m$$

Expresando a la suma ó diferencia de las cantidades que multiplican á x; b las que multiplican á y; y m las cantidades independientes de las incógnitas. De esta fórmula se deducen dos casos esencialmente diferentes.

1° $$ax+by=m$$
2° $$ax-by=m$$

En el primer caso, la suma de dos cantidades debe ser igual á m; y en el segundo, la diferencia de dos cantidades debe ser igual á m. Una vez adoptada la restricción de que las incógnitas han de ser números enteros y positivos fácilmente se percibe que las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax+by=m$$

tienen un número limitado de resoluciones, pues debiendo dar las incógnitas multiplicadas por sus coeficientes, por suma un número m, naturalmente no puede ser mayor que m ninguno de los sumandos ax y by.

Por lo contrario, las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax-by=m$$

tienen en general un número ilimitado de resoluciones, porque es infinito el número de cantidades positivas que pueden dar la misma diferencia, supuesto que ésta no se altera cuando se agrega ó quita una misma cantidad á sus dos términos. Sin embargo, hay algunas cuestiones que dan lugar á ecuaciones de la forma $ax-by=m$, el número de cuyas resoluciones se limita por alguna otra condición, como que el valor de x no pase de 100 ú otra análoga.

282—Regla para resolver las ecuaciones indeterminadas de primer grado.—Sea por resolver la siguiente cuestión. Entre dos jornaleros han ganado 44 reales; al primero se le pagan tres reales diarios, y al segundo cinco reales: se quiere saber ¿cuántos días habrá trabajado cada uno de ellos?

Llamando x los días que trabajó el primer jornalero, é y los que trabajó el segundo, el problema quedará planteado en la ecuación siguiente:

$$3x+5y=44$$

debiendo ser tanto x como y números enteros y positivos. Despejaremos la incógnita que tiene menor coeficiente, en razón de que debiendo quedar este coeficiente como divisor de todos los otros términos, la división podrá efectuarse, obteniéndose un cociente que constará de una parte entera y de otra fraccionaria. Así tendremos:

$$x=\frac{44-5y}{3}$$

ejecutando las divisiones por 3 en el segundo miembro se tendrá:

$$x=14-y+\frac{2-2y}{3}\ldots\ldots\ldots(1)$$

Aquí se ve que el valor de x consta de varias partes de las que 14 é y son enteras, y en consecuencia para que el valor de x sea número entero, es necesario que la parte $\frac{2-2y}{3}$ también lo sea; por lo cual el problema está reducido á determinar para y un valor que haga que el cociente de $2-2y$ partido por 3, sea un número entero que llamaremos p. Este número p es una nueva indeterminada que ha de llenar la condición de ser número entero, y el valor de x (1) se convertirá en

$$x=14-y+p$$

que escribiremos por separado á la derecha y arriba de nuestros cálculos y tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{2-2y}{3}=p$$

quitando el denominador: $2-2y=3p$
despejando á y que tiene menor coeficiente:

$$y=\frac{2-3p}{2}$$

$$\begin{aligned} x&=14-y+p \\ y&=1-p-q \\ p&=2q \\ y&=1-3q \\ x&=13+5q \end{aligned}$$

Ejecutando la división indicada tendremos

$$y=1-p-\frac{p}{2}$$

para que el valor de y sea entero basta que la parte $\frac{p}{2}$ sea igual á un número entero que llamaremos q, y el valor de y se convertirá en

$$y=1-p-q$$

que escribiremos debajo del de x y tendremos que resolver la ecuación

$$\frac{p}{2}=q$$

quitando el denominador se tiene

$$p=2q$$

valor que será entero siempre que lo sea q. Este valor lo pondremos debajo del de y, y observaremos que siempre que sean p y q números enteros, el valor de la incógnita y también será entero, y por último, siendo p é y números enteros, lo será x, En consecuencia, bastará dar á q un valor cualquiera entero para que x é y lo sean.

Sustituyendo el valor $p=2q$ en el de $y=1-p-q$, tendremos:

$y=1-2q-q=1-3q$ que escribiremos abajo del de p.

Sustituyendo el valor de $y=1-3q$ y el de $p=2q$, en el de $x=14-y+p$ se tiene $x=14-1+3q+2q=13+5q$, que pondremos debajo del de y.

En estos últimos valores:

$$\begin{aligned} x&=13+5q \\ y&=1-3q. \end{aligned}$$

si se da á q un valor entero cualquiera, los de x é y lo serán igualmente: pero como además de ser *enteros* los valores de las incógnitas deben ser *positivos*, esto es, *mayores* que 0, para llenar esta otra condición y obtener los límites de los valores que pueden darse á q, estableceremos las siguientes desigualdades:

$$13+5q>0$$
$$1-3q>0$$

Resolviéndolas se obtienen para q los siguientes valores

$$q>-2\tfrac{3}{5};\quad q<\tfrac{1}{3};$$

por el 1º podrá ser $q=-2,-1,0,1,2$ y los demás números positivos: por el 2º podrá ser $q=0,-1,-2,-3$, y los demás números negativos.

En consecuencia, para que x é y sean positivos y enteros q solo podrá tener los valores $0,-1$ y -2. Sustituyendo estos valores de q en los de x é y se obtiene:

siendo
$$q=0,-1,-2.$$
$$x=13,\ 8,\ 3.$$
$$y=1,\ 4,\ 7.$$

El problema admite, pues, tres resoluciones.

1ª El peón que gana 3 rs. trabajó 13 días y el de á 5 rs. trabajó 1 día.
2ª——————idem——3 rs.—idem—8————————5——idem 4 id.
3ª——————idem—— 3 rs.—idem—3————————5——idem 7 id.

En efecto, en cualquiera de estos casos los dos jornaleros juntos ganan 44 rs.

$$3\times13+5\times1=44\ rs.$$
$$3\times\ 8+5\times4=44$$
$$3\times\ 3+5\times7=44$$

En lo expuesto se funda la siguiente:

Regla para resolver una ecuación indeterminada de primer grado.—1º. *Una vez quitados los denominadores y hechas las reducciones, se despeja la incógnita que tiene menor coeficiente; se ejecuta la división en la parte posible y se obtiene el valor de la incógnita expresado por varios términos enteros y una parte en la forma de quebrado: haciendo este quebrado igual á una nueva indeterminada* p, *se obtiene el valor de la primera incógnita expresado por partes enteras. En la ecuación formada con* p *y el quebrado que representa, se quita el denominador: se despeja la segunda incógnita: se ejecuta la división indicada en la parte posible, y haciendo al quebrado que forma parte de su valor igual á una nueva indeterminada* q, *se obtiene el valor de la segunda incógnita expresado en partes enteras. Se procede con el valor de* q *lo mismo que con el de* p, *y se obtiene el valor de* p *expresado por partes enteras y un quebrado que se iguala á una nueva indeterminada* r, *y se continúa así la operación hasta obtener un valor expresado en partes todas de la forma entera.*

2º *Suponiendo que se determinó primero el valor de* x, *en seguida el de* y, *luego los de* p, q, *y que el de* r *haya resultado de la forma entera; se procederá en seguida, en sentido inverso, sustituyendo el valor de* r *en el de* q, *éstos en el de* p, *después éstos en el valor de* y, *y por último, éstos en el de* x.

3º *Obtenidos los valores de* x *y de* y *en la forma entera y en función de una misma indeterminada,* r, *se establecen dos desigualdades indicando que tanto el valor de* x *como el de* y *han de ser mayores que cero: de estas desigualdades se sacan los valores límites de la indeterminada* r; *tomando los números enteros que haya entre éstos límites, y sustituyéndolos en los valores de* x *y de* y *se tendrán todos los valores enteros y positivos que pueden satisfacer las condiciones del problema expresadas en la ecuación.*

283.—Ejemplo.—Sea por resolver en números enteros y positivos la ecuación:

$$27x-19y=43$$

1º Despejando á y, que es la incógnita de menor coeficiente, y ejecutando la división en la parte posible, se tiene:

$$y=\frac{27x-43}{19}=x-2+\frac{8x-5}{19}$$

Para que sea número entero se necesita que lo sea x y el quebrado $\frac{8x-5}{19}$ que haremos igual á la indeterminada p, con lo cual se tendrá:

$$y=x-2+p \;\ldots\ldots (1)$$

$$p=\frac{8x-5}{19} \text{ de donde } x=\frac{19p+5}{8}=2p+\frac{3p+5}{8}$$

y se tendrá $\qquad x=2p+q\ldots\ldots\ldots(2)$

haciendo $q=\frac{3p+5}{8}$, de donde $p=\frac{8q-5}{3}=2q-1+\frac{2q-2}{3}$

y se tendrá $\qquad p=2q-1+r\ldots\ldots\ldots(3)$

haciendo $\qquad r=\frac{2q-2}{3}$, de donde $q=\frac{3r+2}{2}=r+1+\frac{r}{2}$

y se tendrá $\qquad q=r+1+s\ldots\ldots\ldots(4)$

haciendo $\qquad s=\frac{r}{2}$ de donde $r=2s\ldots\ldots\ldots(5)$

Una vez encontradas las ecuaciones (1), (2), (3), (4) y (5) retrocederemos sustituyendo los últimos valores en las ecuaciones anteriores para hacer desaparecer las indeterminadas intermedias.

$$\begin{aligned} y&=x-2+p\ldots\ldots(1)\\ x&=2p+q\ldots\ldots(2)\\ p&=2q-1+r\ldots(3)\\ q&=r+1+s\ldots\ldots(4)\\ r&=2s\ldots\ldots\ldots\ldots(5)\end{aligned}$$

2º Sustituyendo el valor de r en el de q. $q=3s+1$
idem de r y q en el de p. $p=8s+1$
idem de p y q en el de x. $x=19s+3$
idem de x y p en el de y. $y=27s+2$

3º—Para determinar los límites de los valores que pueden darse á la indeterminada s á fin de que x é y sean números *positivos*, estableceremos las siguientes desigualdades:

$19s+3>0$ $27s+2>0$

las que dan $s>-\frac{3}{19}$ $s>-\frac{2}{27}$

los números enteros mayores que estos límites son: 0, 1, 2, 3, 4, etc.

En consecuencia, el número de resoluciones que admite la ecuación propuesta es infinito. Sustituyendo los valores de s en las ecuaciones de los valores generales de x é y:

$x=19s+3$ $y=27s+2$, se tendrá

para $s=0$, 1, 2, 3..........
$x=3$, 22, 41, 60...........
$y=2$, 29, 56, 83...........

Cualquiera de los valores correlativos de x é y satisfacen la ecuación propuesta $27x-19y=43$. En efecto, si se toman por ejemplo los últimos valores puestos se tendrá:

$$27\times60-19\times83=43$$

284.—Observaciones sobre los problemas indeterminados.—Hemos dicho ya que para limitar en algunos casos el número de resoluciones que pueden tener los problemas indeterminados, se fija la condición de que los valores de las incógnitas sean precisamente números *enteros* y *positivos*, y que todas aquellas cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax+by=m$$

conducen precisamente á un número limitado de resoluciones, en razón de que el valor de cualquiera de las incógnitas debe ser menor que m.

En efecto, la ecuación del problema no llega á tomar la forma

$$ax+by=m$$

sino después de haber quitado los denominadores y de hacer las reducciones respectivas, de modo que los coeficientes a y b son números enteros, y debiendo serlo igualmente las incógnitas se tendrá que

$$x<ax$$

porque un factor es menor que su producto por otro nùmero entero. Además

$$ax<m$$

porque un sumando es menor que la suma; luego

$$x < m$$

Del mismo modo demostraríamos que

$$y < m$$

lo cual establece un límite en la magnitud de los valores de las incógnitas y por consecuencia en el número posible de resoluciones del problema. Igualmente dijimos que las cuestiones comprendidas en la fórmula

$$ax - by = m$$

tienen por regla general un número ilimitado de resoluciones; porque siendo m la diferencia entre los valores ax, y by, y pudiendo variar al infinito estos valores sin alterarse su diferencia, es claro que x é y podrán tener una infinidad de valores que son otras tantas resoluciones de la cuestión.

Fijados los casos en que un problema indeterminado conduce á un número *limitado* ó *ilimitado de resoluciones* en números enteros y positivos, vamos á examinar en cuáles el problema será imposible.—La resolución de un problema indeterminado en números enteros y positivos es imposible en tres casos.

1º Cuando da lugar á una ecuación de la forma

$$ax + by = 0$$

porque es imposible que la suma de dos cantidades esencialmente positivas pueda ser cero. Esta ecuación no puede subsistir á menos que se tenga á la vez $x=0$, é $y=0$: ó $a=0$, y $b=0$, condiciones que la reducen á $0=0$.

2ª Cuando la cuestión da lugar á la ecuación de la forma

$$ax + by = -m$$

porque es un absurdo que la suma de dos cantidades positivas sea una cantidad negativa.

3º *Cuando los coeficientes de* x *y de* y *no son primos entre sí y el factor común á ambos no divide exactamente al segundo miembro* m *de la ecuación.* Para demostrar este principio, tomemos la ecuación de la forma

$$ax + by = m$$

y supongamos que a y b no sean primos entre sí, sino que tengan un factor común f por el que no sea divisible m. Esto es, se tendrá...... $a=cf$, $b=df$, no siendo m divisible por el factor f, común á los coeficientes de x é y. Sustituyendo estos valores en la ecuación se transforma en

$$cfx + dfy = m$$

dividiendo por f $$cx+dy=\frac{m}{f}$$

como $\frac{m}{f}$ es un número fraccionario, supuesto que f no divide exactamente á m, y como son números enteros, tanto los coeficientes c y d como las incógnitas x é y, no es posible que la suma de dos productos de números enteros sea un número fraccionario; luego en el caso que venimos examinando es imposible resolver la cuestión en números enteros y positivos.

Igual demostración daríamos para el caso de que el problema diese lugar á una ecuación de la forma

$$ax-by=m$$

pues esta se convertiría en

$$cx-dy=\frac{m}{f}$$

y sería un absurdo que la diferencia entre dos números enteros, cx, y dy, fuera un número fraccionario $\frac{m}{f}$

Siendo útil conocer algunas abreviaciones que pueden efectuarse en la resolución de las ecuaciones indeterminadas, nos ocuparemos de tres principales.

1ª *abreviación.*—A menudo sucede que el coeficiente del término que representa el dividendo en el numerador es mayor que la mitad del denominador; en este caso se disminuyen las operaciones necesarias para resolver la ecuación *cambiando signo al término del numerador, reemplazando el coeficiente de este término por la diferencia que hay entre este coeficiente y el denominador, y poniendo á continuación del quebrado la literal del término del numerador con el signo que tenía en él, y por coeficiente tácito la unidad.*

Si se tiene por ejemplo,

$$x=\frac{a-6y}{8}$$

reemplazaremos en el quebrado el término $-6y$ por $+2y$, y á continuación del quebrado pondremos $-y$, esto es:

$$x=\frac{a-6y}{8}=\frac{a+2y}{8}-y$$

En efecto, $\frac{-6y}{8}=\frac{-6y}{8}+\frac{8y}{8}-y=\frac{2y}{8}-y$ que es lo que prescribe la regla por medio de la cual se disminuye el número de divisiones.

Resolviendo la ecuación

$$3x+5y=22=a$$

$$x=-2y+p$$

$$x=\frac{a-5y}{3}=-y+\frac{a-2y}{3} \qquad y=3p-a$$

como $\frac{a-2y}{3}=\frac{a+y}{3}-y$ $\qquad x=2a-5p$

se tiene $x=-2y+p$ $\qquad x=14-5p$

haciendo $p=\frac{a+y}{3}$ de donde $y=3p-a$ $\qquad y=3p-22$

valores generales de x é y que conducen á los mismos resultados, pero obtenidos más fácilmente.

2ª *abreviación.—Cuando los términos del numerador tienen un factor común, antes de hacer la división debe sacarse este factor común.*

Sea como ejemplo resolver la ecuación

$$80x-17y=39$$

Despejando á $y=\frac{80x-39}{17}=4x-2+\frac{12x-5}{17}$

Efectuando la primera abreviación $\quad y=5x-2+\frac{-5x-5}{17}$

como el numerador $-5x-5$ tiene el factor común -5, lo sacaremos

y se tiene $\quad y=5x-2-5\times\frac{x+1}{17}$

lo que da $\quad y=5x-2-5p \ldots\ldots\ldots y=5x-2-5p$

haciendo $p=\frac{x+1}{17}$ se tiene $x=17p-1 \ldots\ldots\ldots x=17p-1$

sustituyendo este valor en el de y $\qquad y=80p-7$

Con estas abreviaciones se ha llegado fácilmente á las ecuaciones generales, pudiendo determinarse los límites de los valores por medio de las desigualdades

$$17p-1>0 \qquad 80p-7>0$$

que dan un número infinito de resoluciones.

Haciendo:	$p=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4 \ldots\ldots$
se obtiene:	$x=16,\quad 33,\quad 50,\quad 67 \ldots\ldots$
	$y=73,\quad 153,\quad 233,\quad 313 \ldots\ldots$

3.ª *abreviación.—Consiste ésta, como se habrá notado, en reemplazar el valor numérico del 2.º miembro de la primera ecuación por una literal.*

Comprobaciones.—Cuando en la resolución de las ecuaciones indeterminadas no se ha cometido ninguna equivocación, deben verificarse las dos condiciones siguientes: 1.ª los valores generales ó definitivos de las incógnitas x é y tienen siempre la forma general

$$x=n+bt$$
$$y=n'-at$$

siendo n y n' valores numéricos, y los coeficientes de la última indeterminada t serán los de x é y en la ecuación primitiva $ax+by=m$; observándose que en el valor de x el coeficiente b de t será el de y en la ecuación, y que en el valor de y el coeficiente a de t será el de x: además, uno de estos coeficientes tendrá el mismo signo que en la ecuación (b en el caso que consideramos), y el otro coeficiente a tendrá signo contrario. 2.ª, los valores de x y los de y, formarán una serie creciente ó decreciente, en la que la diferencia entre los valores de x será el coeficiente de y; y la diferencia entre los valores de y será el coeficiente de x en la ecuación primitiva.

Por ejemplo: en la última ecuación que hemos resuelto para explicar la 2.ª abreviación, teníamos:

ecuación primitiva	$80x-17y=39$
valores generales de las incógnitas	$x=17p-1$
	$y=80p-7$
valores numéricos	$x=16,\ 33,\ 50,\ 67\ldots\ldots$
	$y=73,\ 153,\ 233,\ 313\ldots\ldots$

Aquí se ve que en los valores generales de las incógnitas la indeterminada p tiene en el valor de x el coeficiente 17 de y en la ecuación con signo cambiado; y en el valor de y, tiene p el coeficiente 80 de x con el mismo signo. Los valores de x forman una serie de números crecientes 16, 33, 50, 67.... entre los cuales la diferencia constante es 17, coeficiente de y en la ecuación. Los valores de y; 73, 153, 233, 313..... forman también una serie de números cuya diferencia es 80, coeficiente de x en la ecuación primitiva $80x-17y=39$.

Esta última observación es útil para determinar todos los valores que pueden tener las incógnitas cuando se conocen dos de ellos.

El mejor medio para asegurarse de que no se ha cometido ningún error en la resolución de una ecuación indeterminada, es *reconstruirla* por medio de los valores generales de las incógnitas, para lo cual basta eliminar la última indeterminada en los expresados valores de las incógnitas.

Por ejemplo, resolviendo la última ecuación, los valores de las incógnitas fueron:

$$x=17p-1$$
$$y=80p-7$$

para eliminar á p seguiremos el método de adición y sustracción y tendremos:

$$80x=80\times17p-80$$
$$17y=80\times17p-119$$

restando la segunda de la primera resulta:

$$80x-17y=119-80=39$$

que es la ecuación primitiva de la que se obtuvieron los valores por medio de los cuales se ha reconstruido.

285.—Problemas.—Como ejercicio pondremos los siguientes problemas indeterminados:

I.—*Determinar dos partes de* 100, *de modo que una sea divisible por* 7 *y la otra por* 11

Una parte será $7x$ y la otra $11y$: la cuestión quedará planteada en la siguiente ecuación que resolveremos conforme á la regla dada (282)

$$7x+11y=100=a$$

1°. $$x=\frac{a-11y}{7}=-y+\frac{a-4y}{7}$$

Por la 1.ª abreviación $x=-2y+\dfrac{a+3y}{7}$ ...... $x=-2y+p$

$p=\dfrac{a+3y}{7}$ $y=\dfrac{7p-a}{3}=2p+\dfrac{p-a}{3}$ .... $y=2p+q$

$q=\dfrac{p-a}{3}$ $p=3q+a$ .... $p=3q+a$

2.° Sustituyendo el valor de p en el de y ..... $y=7q+2a$

Sustituyéndolo en el valor de x .... $x=-11q-3a$

3.° Estableciendo las desigualdades, y sustituyendo el valor de a

$$y=7q+200>0; \quad x=-11q-300>0$$

se tiene $q>-28\frac{4}{7}$ $q<-27\frac{3}{11}$

En consecuencia q no puede tener más que un valor entero igual á—28, lo que da $x=8$, $y=4$; y las partes de 100 serán 56 y 44, divisible la 1.ª por 7, y la 2.ª por 11.

II.—Un labrador compra mulas y bueyes en lo que gasta 1,770 pesos: cada mula le cuesta 31 pesos, y cada buey 21: se quiere saber ¿cuántas mulas y cuántos bueyes ha comprado?

Llamando x el número de mulas é y el de bueyes, tendremos:

$$31x+21y=1770=a$$

$$y=\frac{a-31x}{21}=-x+\frac{a-10x}{21}\ldots\ldots\ldots y=p-x$$

$$p=\frac{a-10x}{21},\quad x=\frac{a-21p}{10}=-2p+\frac{a-p}{10}\ldots x=-2p+q$$

$$q=\frac{a-p}{10},\ p=a-10q\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p=a-10q$$

$$x=21q-2a$$
$$y=3a-31q$$

$$x=21q-3540>0.\quad y=5310-31q>0$$
$$q>168\tfrac{12}{21}\qquad q<171\tfrac{9}{31}$$

Valores de	$q=169,$	$170,$	171
	$x=\ \ 9,$	$30,$	51
	$y=\ 71,$	$40,$	9

El problema admite, pues, tres resoluciones.

III.—Preguntándole á una persona qué cantidad de dinero tiene, contesta que si lo cuenta de 7 en 7 pesos le sobran 5; y que si lo cuenta de 11 en 11 pesos le sobran 3; advirtiendo que la suma que tiene no llega á 200 pesos

Con tales datos el problema quedará planteado en la ecuación

$$7x+5=11y+3$$

Trasladando $\qquad 11y-7x=2$

la forma de esta ecuación expresando una diferencia debía conducirnos á un número ilimitado de resoluciones y tal sería el resultado si no se tuviera la condición de que el número de pesos representado por $7x+5$ ó por $11y+3$ no puede ser mayor que 200. Resolveremos la ecuación $11y-7x=2$.

$$x=\frac{11y-2}{7}=y+\frac{4y-2}{7}=2y-\frac{3y+2}{7}\ldots\ldots\ldots x=2y-p$$

$$p=\frac{3y+2}{7}\text{ de donde }y=\frac{7p-2}{3}=2p+\frac{p-2}{3}\ldots y=2p+q$$

$$q=\frac{p-2}{3}\qquad p=3q+2\ldots\ldots\ldots p=3q+2$$

$$y=7q+4$$
$$x=11q+6$$

$$x=11q+6>0,\quad y=7q+4>0$$

dan $\qquad q>-\frac{6}{11}\qquad q>-\frac{4}{7}$

valores de	$q=0,$	$1,$	$2,$	$3,$	$4\ldots\ldots\ldots$
	$x=6,$	$17,$	$28,$	$39,$	$50\ldots\ldots\ldots$
	$y=4,$	$11,$	$18,$	$25,$	$32\ldots\ldots\ldots$

Tomando los valores relativos de x é y se encuentra que la cantidad podria ser:

para $$x=6,\quad 17,\quad 28,$$
$$y=4,\quad 11,\quad 18,$$
$$7x+5=47,\quad 124,\quad 201,$$
$$11y+3=47,\quad 124,\quad 201,$$

Como los terceros valores de x é y conducen á una suma de 201 pesos, mayor que 200, es claro que la cuestión no admite más que dos resoluciones.

IV.—*Hallar un número divisible por* 5 *y por* 7.

Si llamamos n este número, tendremos que $n=5x=7y$, de donde resulta que el problema quedará planteado en la ecuación

$$5x-7y=0$$

la que resolviéndola debe conducir á un número infinito de resoluciones cuando no hay otra condición que lo limite.

$$x=\frac{7y}{5}=y+\frac{2y}{5}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x=y+p$$

$$p=\frac{2y}{5}\text{ de donde }y=\frac{5p}{2}=2p+\frac{p}{2}\ldots\ldots y=2p+q$$

$$q=\frac{p}{2},\quad p=2q\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots p=2q$$

$$y=5q$$
$$x=7q$$

las desigualdades $\quad 5q>0 \qquad 7q>0$

dan los límites $\quad q>0 \qquad q>0$

luego $$q=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\ldots\ldots$$
$$x=7,\quad 14,\quad 21,\quad 28,\ldots\ldots$$
$$y=5,\quad 10,\quad 15,\quad 20,\ldots\ldots$$

con una infinidad de resoluciones.

(*) 286.—ECUACIONES INDETERMINADAS DE PRIMER GRADO CON MAS DE DOS INCOGNITAS.—Consideraremos primero el caso en que se tengan tres incógnitas y solo haya dos ecuaciones.

Supongamos que se trate de determinar en números enteros y positivos el valor de las incógnitas en las ecuaciones:

$$6x+7y+4z=122\ldots\ldots(1)$$
$$11x+8y-6z=145\ldots\ldots(2)$$

(*) Este párrafo y los marcados con asterisco, no deben formar parte del programa de la Escuela Nacional Preparatoria, en concepto del autor.

Con el objeto de eliminar á z multiplicaremos por 3 la ecuación (1)

$$18x+21y+12z=366$$

Idem por 2 la (2) $\quad 22x+16y-12z=290$

Sumándolas $\quad 40x+37y=656 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

Teniendo una ecuación con dos incógnitas la resolveremos como sigue:

$$y=\frac{656-40x}{37}=17-x+\frac{27-3x}{37}\ldots\ldots\ldots\ldots y=17-x+p$$

haciendo

$$p=\frac{27-3x}{37} \quad x=\frac{27-37p}{3}=9-12p-\frac{p}{3}\ldots\ldots x=9-12p-q$$

haciendo $\quad q=\frac{p}{3}, \; p=3q\ldots\ldots\ldots\ldots p=3q$

Sustituyendo se tiene $\quad \left.\begin{array}{l} x=9-37q \\ y=8+40q \end{array}\right\} \quad (4)$

los valores $x=9-37q$, $y=8+40q$, los sustituiremos en la ecuación (1), y tendremos:

$$54-222q+56+280q+4z=122$$

reduciendo $\quad 58q+4z=12$

dividiendo por 2 $\quad 29q+2z=6\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$

resolviendo la ecuación (5)

$$z=\frac{6-29q}{2}=3-14q-\frac{q}{2}\ldots\ldots\ldots\ldots z=3-14q-r$$

haciendo $r=\frac{q}{2}$ lo que da$\ldots\ldots\ldots\ldots q=2r$

Sustituyendo el valor de q en el de $z\ldots\ldots z=3-29r$

Obtenidos los valores de z y q en función de r sustituiremos el valor de q en los de x é y (4), y se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x=9-74r \\ y=8+80r \\ z=3-29r \end{array}\right\} \quad (6)$$

con lo cual se ha conseguido que las tres incógnitas queden en función de la misma indeterminada r.

Una vez obtenidos estos valores generales, debiendo ser las incógnitas números enteros y positivos, estableceremos las siguientes desigualdades para determinar los límites de los valores de la indeterminada r.

$$9-74r>0, \qquad 8+80r>0, \qquad 3-29r>0$$

que dan $\quad r<\frac{9}{74} \qquad r>-\frac{8}{80} \qquad r<\frac{3}{29}$

Aquí debemos hacer notar que *siempre que hay tres desigualdades, las condiciones de una, están explícita ó implícitamente comprendidas en otra; por lo que con seguridad puede excluirse una de ellas.*

En el caso actual tenemos:

$$r<\tfrac{9}{74} \text{ y } r<\tfrac{3}{29}$$

y si multiplicamos por 3 los dos términos del último quebrado resulta

$$r<\tfrac{9}{74} \text{ y } r<\tfrac{9}{87}$$

por lo que todo número menor que $\frac{9}{87}$ es también menor que $\frac{9}{74}$.

De esto resulta que excluyendo la primera desigualdad $r<\frac{9}{74}$, y debiendo ser $r<\frac{3}{29}$ y $r>-\frac{8}{80}$, solo podrá ser cero. Haciendo: $r=0$ se tiene en el sistema (6) $x=9$, $y=8$, $z=3$, números que verifican las ecuaciones:

$$6x+7y+4z=122 \qquad\qquad 11x+8y-6z=145$$

El procedimiento que acabamos de explicar se resume en la siguiente

Regla para resolver un problema indeterminado de primer grado con tres incógnitas y dos ecuaciones.—*En las dos ecuaciones propuestas se elimina una incógnita y de la ecuación resultante se deducen dos fórmulas que dan los valores de las incógnitas en función de una indeterminada, que llamaremos* s. *En seguida se sustituyen los valores de estas incógnitas en cualquiera de las dos ecuaciones propuestas, lo que da una ecuación que no contiene más que á la incógnita que se eliminó al principio y á* s. *Por medio de la regla general* (282) *se deducen de esta ecuación dos fórmulas que dan los valores de las dos incógnitas que contiene en función de una nueva indeterminada que llamaremos* t. *Por último, se sustituirá en los valores de las dos primeras incógnitas el valor de* s, *con lo que las tres incógnitas quedarán expresadas en función de una misma indeterminada* t, *y con cuyos valores se establecerán tres desigualdades indicando que son mayores que cero para fijar los límites de sus valores y deducir los de las incógnitas.*

Repetiremos que para que la resolución de las ecuaciones pueda conducir á valores enteros, es preciso que si los coeficientes de las incógnitas tienen un factor común, este factor divida exactamente al 2º miembro de la ecuación. [284—3.º]

Cuando una de las tres incógnitas tenga por coeficiente la unidad, para abreviar la resolución, deberá eliminarse esta incógnita, y después de haber deducido las fórmulas que dan los valores de las otras dos incógnitas en función de la indeterminada s, se sustituirán en la ecuación donde la 3ª incógnita tiene la unidad por coeficiente, pues asi se obtiene desde luego su valor en función de la misma indeterminada s.

(*) 287.—PROBLEMAS.—Para ejercicio resolveremos los siguientes:

I. *Un comerciante tiene vino de tres clases: uno que vale* 15 *pesos la jarra, otro de á* 10 *y el tercero de á* 6 *pesos; queriendo formar una mezcla de* 100 *jarras que resulte á razón de* 8 *pesos la jarra, se pregunta, ¿cuántas jarras de vino deberá tomar de cada una de las tres clases?*

Llamando x, y, z, las porciones de cada clase, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$x+y+z=100 \ldots\ldots\ldots (1)$$
$$15x+10y+6z=800 \ldots\ldots (2)$$

Multiplicando la [1] por 6 $\qquad 6x+6y+6z=600$

Restando ésta de la [2] $\qquad 9x+4y=200 \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$

$$y=\frac{200-9x}{4}=50-2x-\frac{x}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots y=50-2x-p$$

haciendo $p=\frac{x}{4}$ se tiene ....
$$\left.\begin{array}{l} x=4p \\ y=50-9p \end{array}\right\} (4)$$

Sustituyendo los valores [4] de x é y en la ecuación [1] se tiene:

$$4p+50-9p+z=100 \qquad \text{de donde} \qquad z=50+5p$$

Teniendo los valores de las tres incógnitas en función de p para fijar los límites de esta indeterminada, estableceremos las siguientes desigualdades:

$$4p>0 \qquad 50-9p>0, \qquad 50+5p>0$$

las que dan $\qquad p>0 \qquad p<5\frac{5}{9} \qquad p>-10$

La tercera condición es inútil, porque está comprendida en **la 1ª** y p **no** tendrá más que 5 valores de 1 á 5.

$p=$	1,	2,	3,	4,	5
$x=$	4,	8,	12,	16,	20
$y=$	41,	32,	23,	14,	5
$z=$	55,	60,	65,	70,	75

Cualquier sistema de los cinco valores correlativos de las tres incógnitas satisfacen las condiciones del problema. Tomemos por comprobación, por ejemplo, los segundos, y se tiene

$$8+32+60=100$$
$$15\times 8+32\times 10+6\times 60=800$$

II.—*Dividir el número 120 en tres partes, divisible la primera por 3, la segunda por 4, y la tercera por 5; y tales que una de ellas, la segunda, sea igual á la semisuma de las otras dos.*

Llamando $3x$ la primera parte, $4y$ la segunda, $5z$ la tercera, el problema quedará planteado en las siguientes ecuaciones:

$$3x+4y+5z=120 \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$4y=\frac{3x+5z}{2} \ldots\ldots\ldots (2)$$

Restando la segunda ecuación de la (1) $3x+5z=120-\frac{3x+5z}{2}$

quitando el denominador $6x+10z=240-3x-5z$
trasladando y reduciendo $9x+15z=240$
Dividiendo por 3 $3x+5z=80\ldots\ldots(3)$

$$x=\frac{80-5z}{3}=-z+\frac{80-2z}{3}=-2z+\frac{80+z}{3}\ldots\ldots x=p-2z$$

$$p=\frac{80+z}{3}\qquad z=3p-80\ldots\ldots z=3p-80 \left.\begin{matrix} \\ x=160-5p\end{matrix}\right\}(4)$$

Sustituyendo los valores (4) en la (1) se tiene

$$480-15p+4y+15p-400=120$$

reduciendo y despejando á y se tiene $y=10$

No dependiendo el valor de y de ninguna indeterminada, fijaremos los límites que pueda tener el de p por medio de las desigualdades

$$3p-80>0 \qquad 160-5p>0$$

que dan $p>26\frac{2}{3}$ $\qquad p<32$

los valores de p serán

$p=$	27,	28,	29,	30,	31
$x=$	25,	20,	15,	10,	5
$y=$	10,	10,	10,	10,	10
$z=$	1,	4,	7,	10,	13

con cualquier sistema de los valores correlativos de las tres incógnitas se verifican las condiciones del problema.

(*) 288.—Problemas indeterminados de primer grado con una incógnita más que el número de ecuaciones.—Cuando se tiene, por ejemplo, tres ecuaciones y cuatro incógnitas se seguirá la siguiente regla para resolver el problema:

Se elimina una de las incógnitas, y resultando un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas, se resuelve éste como se ha explicado (286), quedando expresado el valor de las incógnitas en función de una indeterminada que llamaremos s. *En seguida se sustituyen los valores de las tres incógnitas en una de las ecuaciones primitivas, con lo que se obtiene una ecuación con la cuarta incógnita y la indeterminada* s. *Si en esta ecuación la cuarta incógnita no tiene por coeficiente la unidad, se resuelve por la regla general (282); obteniéndose los valores de la 4ª incógnita y de* s *en función de una indeterminada que llamaremos* t. *El valor encontrado para* s *se sustituye en los valores de las tres primeras incógnitas en función de esta indeterminada, y resultará que las cuatro incógnitas quedarán en función de la indeterminada* t. *Por último, estableciendo cuatro desigualdades con los valores de las incógnitas que deben ser mayores que cero, se fijarán los límites de* t *y los valores correspondientes de las incógnitas.*

El mismo procedimiento se seguirá cuando se tengan cinco incógnitas y cuatro ecuaciones, y en general, cuando haya de resolverse un problema con una incógnita más que el número de ecuaciones.

CUADRADO Y RAIZ CUADRADA.

289.—CUADRADO Y RAÍZ CUADRADA DE LOS MONOMIOS.—Se sabe que el cuadrado ó la segunda potencia de una cantidad es el producto que resulta de multiplicarla por sí misma, y en consecuencia, para elevar un monomio ó una expresión algebraica cualquiera al cuadrado, bastará multiplicarla por sí misma por las reglas que conocemos.

Si se quiere elevar al cuadrado $3a^3 x^5$ se tendrá:

$$(3a^3x^5)^2 = 3a^3 x^5 \times 3a^3 x^5$$

y como el orden de los factores no altera el producto, tendremos:

$$(3a^3x^5)^2 = 3.3a^3 a^3 x^5 x^5 = 3^2 a^{3\times2} x^{5\times2}$$

Si se tiene: $(-5c^3x^4)^2$, como factores con signos iguales dan un producto afectado del signo más

tendremos: $$(-5c^3x^4)^2 = +5^2 c^{3\times2} x^{4\times2}$$

De esto se deduce que *para elevar al cuadrado un monomio, el resultado se afectará siempre del signo más, el coeficiente se elevará al cuadrado por las reglas de aritmética, y los exponentes se multiplicarán por 2.*

Cuando el monomio sea un quebrado, se elevará conforme á esta regla, separadamente el numerador y el denominador.

Recíprocamente, *para extraer la raíz de un monomio, se extraerá la raíz cuadrada del coeficiente y se dividirán por 2 los exponentes de las literales, afectando el resultado con el doble signo más y menos, siendo indispensable que el monomio sea positivo para que la operación sea posible.*

Por ejemplo:

$$\sqrt{4a^2b^6} = \pm 2ab^3 \qquad \sqrt{9a^4b^2c^8} = \pm 3a^2bc^4$$

El signo $\pm$ se llama de ambigüedad, porque como tanto $+2ab^3$ como $-2ab^3$ elevados al cuadrado producen $4a^2b^6$; hay duda sobre cual de estos dos signos debe tener el resultado, el cual es preciso afectarlo de ambos cuando no hay alguna condición que obligue á desechar el valor positivo ó el negativo.

Para extraer la raíz cuadrada de un quebrado, se extraerá separadamente la del numerador y la del denominador, afectando el resultado del signo de ambigüedad, siendo necesario que el quebrado sea positivo para que la operación sea posible.

Por ejemplo:

$$\sqrt{\frac{16a^2b^4}{4a^6}}=\pm\frac{4ab^2}{2a^3}=\pm\frac{2b^2}{a^2}$$

Se conoce que un *monomio no tiene raíz algebraica cuando su coeficiente no es cuadrado perfecto, ó cuando los exponentes de las literales no son pares.* En este caso, la operación algebraica no conduce á un resultado racional, y será necesario sustituir los valores de las literales y ejecutar en seguida la extracción de la raíz del número correspondiente.

Cuando el monomio á que se ha de extraer la raíz cuadrada está precedido del signo *menos,* la operación no puede ejecutarse porque no hay ninguna cantidad que elevada al cuadrado produzca una cantidad negativa. En efecto, si se tiene por ejemplo, $\sqrt{-a^2}$ ninguna cantidad positiva como $+a$, ni ninguna negativa como $-a$, ni aun cero, que es el origen de unas y otras, multiplicado por sí mismo, puede dar por producto la cantidad negativa $-a^2$. Esta imposibilidad para encontrar el valor del resultado expresado por las cantidades que conocemos, indica un absurdo y se llama *expresión imaginaria á la raíz cuadrada de una cantidad negativa.*

Teorema.—*La raíz cuadrada del producto de varios factores, es igual al producto de las raíces de los factores.*

Vamos á demostrar que

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\times\sqrt{b}\times\sqrt{c}$$

Supongamos que $\qquad \sqrt{abc}=x$

y que $\qquad \sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}=y$

Elevando al cuadrado estas dos ecuaciones, teniendo presente la definición de la raíz cuadrada y que para elevar un monomio hay que elevar cada uno de sus factores, resulta:

$$abc=x^2$$
$$abc=y^2$$

luego $\qquad x^2=y^2$

y extrayendo raíz $\qquad x=y$

Siendo x igual á y sus valores también lo serán, y se tendrá:

$$\sqrt{abc}=\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}$$

que es lo que se debía demostrar:

Este teorema sirve de fundamento para sacar fuera del radical alguno ó varios de los factores que tienen raíz exacta.

Por ejemplo: $\qquad \sqrt{4ab^2c^3}=\pm 2bc\sqrt{ac}$

Cuando un monomio consta de algunos factores que son cuadrados perfectos y de otros que no lo son, se extrae la raíz de los factores que tienen raíz exacta, y el resultado se pondrá como factor de los otros que se dejarán dentro del radical.

Por ejemplo: $\sqrt{4ab^2c^5}=2bc^2\sqrt{ac}$

Recíprocamente, y fundándose en el teorema demostrado, pueden introducirse dentro del radical algunos de los factores que están como coeficientes de la expresión radical, elevándolos al cuadrado.

Recordaremos (240) que en las expresiones radicales se llama coeficiente á las cantidades literales ó numéricas que están como factor del radical.

Como los términos que tienen raíz cuadrada exacta son aquellos cuyos coeficientes son cuadrados perfectos y cuyas literales están afectadas de exponentes pares, á menudo se descompone una expresión radical, con el fin de simplificarla, en unos factores que tienen raíz exacta. satisfaciendo estas dos condiciones y en otros que no la tienen. Por ejemplo:

$$\sqrt{32a^5b^4}=\sqrt{16\times 2a^4ab^2b}=4a^2b\sqrt{2ab}$$

$$\sqrt{48a^7b^{13}c^5}=\sqrt{16\times 3a^6ab^{12}bc^4c}=4a^3b^6c^2\sqrt{3abc}$$

igualmente $3a\sqrt{b}=\sqrt{9a^2b}$

290.—Cuadrado de un binomio y raíz cuadrada de un trinomio.—Para elevar un binomio al cuadrado bastará multiplicarlo por sí mismo. Así:

$$(a+b)^2=(a+b)\ (a+b)=a^2+2ab+b^2$$
$$(a-b)^2=(a-b)\ (a-b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(-a+b)^2=(-a+b)\ (-a+b)=a^2-2ab+b^2$$
$$(-a-b)^2=(-a-b)\ (-a-b)=a^2+2ab+b^2$$

en general $(\pm a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$

luego el cuadrado de un binomio consta de tres términos: el cuadrado de cada uno de sus dos términos, más ó menos el doble producto de los términos del binomio. Este doble producto será positivo cuando los dos términos del binomio tengan el mismo signo, y será negativo cuando los términos del binomio tengan signos desiguales.

Para que un trinomio pueda tener raíz cuadradà, es necesario que dos de sus términos sean positivos y cuadrados perfectos, y que el tercer término sea igual al doble producto de las raíces de los otros dos. Cuando este doble producto sea positivo, la raíz del trinomio será igual á la suma de los dos factores que forman el doble producto; y cuando sea negativo, la raíz será igual á la diferencia de esos factores.

Por ejemplo:

$$\left(\tfrac{3}{4}a-bc^3\right)^2=\tfrac{9}{16}a^2-\tfrac{6}{4}abc^3+b^2c^6$$

$$(ax+x)^2=a^2x^2+2ax^2+x^2$$

$$\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2+ab+b^2}=\tfrac{1}{2}a+b$$

$$\sqrt{4a^2-\tfrac{4}{3}ab^3+\tfrac{1}{9}b^6}=2a-\tfrac{1}{3}b^3$$

291.—Cuadrado y raíz cuadrada de los polinomios.—Para elevar un polinomio cualquiera $a+b+c+d$ al cuadrado, consideraremos primero el binomio $a+b$ cuya segunda potencia es igual al cuadrado del primer término, mas el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo. En seguida consideraremos el trinomio $(a+b+c)$ como compuesto de dos términos: uno $(a+b)$ cuyo cuadrado conocemos ya, y de otro c. Por último, consideraremos el polinomio $(a+b+c+d)$ como compuesto de dos términos: uno $(a+b+c)$, cuyo cuadrado conocemos ya, y de otro d.

Así, pues, tendremos:

1° $$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

2° $$(a+b+c)^2=\big((a+b)+c\big)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2$$

3° $$(a+b+c+d)^2=\big((a+b+c)+d\big)^2=a^2+2ab+b^2+2(a+b)c+c^2+2(a+b+c)d+d^2$$

De estos resultados se deduce la siguiente

Regla.—*El cuadrado de un polinomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo; más el doble producto de la suma de los dos primeros por el tercero; más el cuadrado del tercero, más el doble producto de la suma de los tres primeros por el cuarto, más el cuadrado del cuarto, y así sucesivamente.*

Sea como ejemplo elevar al cuadrado la expresión

$$(ax^3+bx^2+cx+d)^2=a^2x^6+2abx^5+b^2x^4+2(ax^3+bx^2)cx+c^2x^2+2(ax^3+bx^2+cx)d+d^2$$

Es fácil observar que cuando hay una misma literal en varios términos de un polinomio, al elevarlo al cuadrado, si se ha ordenado el primer polinomio con respecto á las potencias de la literal, el resultado quedará igualmente ordenado con respecto á las potencias de la misma literal.

Como la extracción de la raíz cuadrada es una operación inversa de la elevación al cuadrado, para efectuar esta operación es necesario encontrar sucesivamente las partes de la raíz, formar en seguida las partidas del cuadrado de los términos encontrados y restarlas del polinomio cuya raíz se busca.

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla.—*Para extraer la raíz cuadrada de un polinomio se ordenará con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal: en seguida se buscará la raíz cuadrada del primer término, se formará su cuadrado y se restará del polinomio, quedando como resta todos los términos del polinomio menos el primero: en seguida se duplicará la raíz hallada, se dividirá el primer término de la resta por el duplo de la raíz, y el cociente, que será el segundo término de la raíz, se pondrá con su signo al lado de ésta y del duplo del primero de la raíz; se multiplicará el segundo término de la raíz por la suma del duplo del primero más el segundo, y el producto se restará de la primera resta: en seguida se duplicarán los dos términos de la raíz, se dividirá el primer término de la resta por el primero del duplo de la raíz, el cociente será el tercero de la raíz: se multiplicará por él la suma del duplo de los dos primeros términos de la raíz más el tercero, y el producto se restará de la segunda resta; y así se continuará la operación hasta encontrar cero por resta ó algún indicio de que no es posible obtener algebraicamente la raíz.*

292.—Ejemplos.—Como ejercicio de la extracción de la raíz cuadrada de los polinomios, pondremos los siguientes ejemplos:

I. Extraer la raíz cuadrada de $9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4$, polinomio ordenado con respecto á las potencias de a.

He aquí la marcha de la operación:

$$
\begin{array}{r|l}
\sqrt{9a^4-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4} & 3a^2-2ab+5b^2 \\
-9a^4\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad & \\ \cline{2-2}
\hline
-12a^3b+34a^2b^2-20ab^3+25b^4 & (6a^2-2ab)\times-2ab \\ \cline{2-2}
+12a^3b-4a^2b^2\qquad\qquad\qquad & (6a^2-4ab+5b^2)\times 5b^2 \\
\cline{1-1}
+30a^2b^2-20ab^3+25b^4 & \\
-30a^2b^2+20ab^3-25b^4 & \\
\cline{1-1}
0 &
\end{array}
$$

La raíz del polinomio propuesto es el trinomio $3a^2-2ab+5b^2$, lo que se comprueba multiplicándolo por sí mismo.

II.—Extraer la raíz cuadrada de $a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2} & a+b+c \\
\hline
-a^2 & (2a+b)\times b \\
\hline
+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2 & (2a+2b+c)\times c \\
-2ab-b^2 & \\
\hline
+2ac+2bc+c^2 & \\
-2ac-2bc-c^2 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

293.—Observaciones sobre la extracción de la raiz cuadrada de los polinomios y de los binomios.—En Algebra sucede lo mismo que en Aritmética: rara vez una cantidad tiene raiz exacta, y así como hemos indicado que con un corto examen puede decidirse desde luego si un monomio ó si un trinomio tendrá ó no raíz, otro tanto puede hacerse con un polinomio.

Para que un polinomio pueda tener raíz cuadrada algebraica, es indispensable que, después de haberlo ordenado con respecto á las potencias decrecientes de una misma literal, tanto el primer término como el último sean positivos y cuadrados perfectos, debiendo satisfacerse esta condición con cualquiera otra literal respecto de la que pudiera haberse ordenado el polinomio: además, al ejecutar la operación es necesario que pueda dividirse exactamente el primer término de cada resta por el duplo del primer término de la raíz. Cuando estas condiciones estén satisfechas, puede comenzarse y seguirse ejecutando la operación; pudiendo asegurarse que un polinomio no tendrá raíz algebraica cuando no se verifiquen esas condiciones, ó cuando se haya encontrado en la raíz un término que sea la raíz cuadrada del último del polinomio, y quede una resta.

Un binomio no puede ser el cuadrado de ninguna expresión algebraica

En efecto, no es el cuadrado de un monomio supuesto que el cuadrado de un monomio es monomio; tampoco es el cuadrado de un binomio, supuesto que el cuadrado de un binomio es un trinomio; en fin, no es el cuadrado de un trinomio ni de ningún polinomio, porque *el cuadrado de un polinomio consta cuando menos de cuatro términos.* En efecto, como para elevar al cuadrado un polinomio, que supondremos ordenado respecto á las potencias decrecientes de una misma literal, es necesario multiplicarlo por sí mismo, en el producto encontraremos los dos términos que provienen respectivamente de elevar al cuadrado el término en que la literal ordenadora está elevada á la mayor y á la menor potencia, porque no puede haber otros términos semejantes á ellos; (250—2.ª) además el segundo término del producto y el penúltimo son irreducibles con los otros términos del producto, porque siendo el segundo término del producto, el doble del producto de los dos primeros términos del polinomio, encerrará la literal ordenadora con un exponente mayor que el que puede tener esta literal en los demás términos, y por tanto, no habrá otro término semejante con el que pudiera reducirse; y como el mismo raciocinio es aplicable al penúltimo término del producto, queda demostrado que el cuadrado de un polinomio consta cuando menos de cuatro términos.

Resulta, pues, que á un binomio no es posible extraerle la raíz cuadrada *algebraicamente*; siendo preciso conocer los valores numéricos de los términos del binomio y hacer la operación por Aritmética.

Cálculo de las expresiones radicales y de las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios y negativos.

264.—Elevación de los monomios á una potencia cualquiera.—Hemos visto (247) que para multiplicar dos monomios se multiplican sus coeficientes, que cuando las literales son iguales se suman sus exponentes, y que el producto lleva el signo + cuando los factores tienen signos iguales, y el signo — cuando tienen signos desiguales. En consecuencia, cuando tengamos que elevar un monomio á una potencia, la operación se transforma en una multiplicación cuyos factores son iguales, y por tanto, habrá que elevar los coeficientes por las reglas de Aritmética, y en cuanto á las literales, las sumas sucesivas de sus exponentes, que son iguales, se convierten en multiplicar cada exponente por el grado de la potencia.

$$
\begin{aligned}
(2a^3b^2)^4 &= 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \times 2a^3b^2 \\
&= 2.\ 2.\ 2.\ 2a^3a^3a^3a^3b^2b^2b^2b^2 = 2^4a^{3\times4}b^{2\times4} = 16a^{12}b^8
\end{aligned}
$$

Respecto al signo del resultado se observará que cuando el monomio es positivo, como en la multiplicación más por más siempre da más, la potencia, cualquiera que sea su grado, también será positiva. Si el monomio está afectado del signo menos, consideraremos dos casos: *cuando el exponente de la potencia sea par, y cuando sea impar.*

Cuando el exponente de una potencia es *par*, será por esta causa duplo de otro número que llamaremos n, y en virtud de que el producto de dos literales iguales se obtiene sumando sus exponentes, tendremos, que denominando en general $2n$ el exponente *par* y siendo

$$(+a)^{2n}=+a^n\times+a^n=+a^{2n}$$
$$(-a)^{2n}=-a^n\times-a^n=+a^{2n}$$

resulta que *la potencia par de una cantidad positiva ó negativa, siempre es positiva.*

Cuando la potencia sea *impar* podremos suponer el exponente igual á $2n+1$ y la potencia del monomio a será el producto de $a^{2n}\times a$. Ahora bien, si el monomio es positivo, como los factores que forman la potencia son positivos, tendremos:

$$(+a)^{2n+1}=+a^{2n}\times+a=+a^{2n+1}$$

Si el monomio es negativo, como acabamos de ver que $(-a)^{2n}=+a^{2n}$, uno de los factores de la potencia impar $2n+1$ de a será positivo, y el otro: $-a$ será negativo, razón por la cual el producto definitivo será negativo, y tendremos:

$$(-a)^{2n+1}=(-a)^{2n}\times-a=+a^{2n}\times-a=-a^{2n+1}$$

resulta pues, que *la potencia impar de un monomio estará afectada del mismo signo del monomio.*

De lo expuesto se deduce la siguiente

Regla.—*Para elevar un monomio á una potencia, se elevará á ésta su coeficiente por las reglas de la aritmética, se multiplicarán los exponentes de las literales por el exponente de la potencia, y el resultado se afectará del signo más cuando el grado de la potencia sea par, y cuando sea impar se le pondrá el signo del monomio.*

Por ejemplo:

$$\left(\frac{6a^3b^n}{c^2}\right)^5=\frac{7776a^{15}b^{5n}}{c^{10}},\quad (-\tfrac{3}{4}a^2dh^3)^5=-\frac{243}{1024}\,a^{10}d^5h^{15}$$

295.—Extracción de raíces de los monomios.—Como para determinar la raíz de un monomio hay que ejecutar operaciones inversas de las que hemos prescrito para elevarlo á una potencia, habrá que extraer la raíz de su coeficiente por las reglas de aritmética y que dividir el exponente de cada literal por el índice del radical.

Con *respecto á los signos* haremos notar que como tanto $+a$, como $-a$ elevada á una potencia par $2n$ produce un resultado positivo $+a^{2n}$, se infiere que la raíz par de una cantidad positiva debe ir precedida del signo $\pm$ esto es:

$$\sqrt[2n]{+A}=\pm x$$

y como toda potencia impar de una cantidad lleva el signo de la cantidad, tendremos:

$$\sqrt[2n+1]{+A}=+x$$

$$\sqrt[2n+1]{-A}=-x$$

Examinemos, por último, el caso en que la cantidad sea negativa y el índice de la raiz par. Supuesto que tanto $+a$, como $-a$, elevada á una potencia par da $+a^{2n}$, y toda potencia de 0 es cero, se infiere que no hay ninguna cantidad ni mayor ni menor, ni igual á cero que elevada á una potencia *par* pueda dar por resultado una cantidad negativa. En consecuencia la expresion $\sqrt[2n]{-a}$ es el símbolo de un absurdo, de una operación impracticable, y se dice que es *una expresión imaginaria.*

En lo expuesto anteriormente se funda la siguiente

Regla.—*Pará extraer la raíz de un monomio, se extrae la raíz de su coeficiente, y se dividen los exponentes de las literales por el índice de la raíz: poniendo el signo $\pm$ al resultado cuando el monomio es positivo y el índice del radical es par; ó el signo del monomio cuando el índice del radical es impar. Si el monomio es negativo y el índice de la raíz es par, la expresión es imaginaria y la operación solo puede quedar indicada.*

Por ejemplo:

$$\sqrt[4]{81a^8b^{12}c^{16}}=\pm 3a^2b^3c^4, \qquad \sqrt[5]{-\frac{a^{10}b^5c^{15}}{32\,d^{10}}}=-\frac{a^2bc^3}{2d^2}$$

En consecuencia, para que tenga raíz exacta un monomio, es necesario que su coeficiente la tenga, y que todos los exponentes de las literales sean divisibles exactamente por el índice de la raíz. Cuando éste es par y el monomio negativo, la raíz es imposible y la expresión es imaginaria.

296.—Teoremas relativos á los radicales.—Vamos á demostrar algunos teoremas que sirven de fundamento para transformar las expresiones radicales y para efectuar con ellas toda clase de operaciones.

Teorema.—I. *La raíz del producto de varias cantidades es igual al producto de las raíces de sus factores.*

Demostración.—Sea $\sqrt[n]{abc}$; decimos que esta expresión es igual al producto de $\sqrt[n]{a}\times\sqrt[n]{b}\times\sqrt[n]{c}$; porque si suponemos que

$$\sqrt[n]{abc}=x\ldots\ldots[1]$$

y que

$$\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}=y\ldots\ldots[2]$$

Por la definición de raíz, tenemos que

$$(\sqrt[n]{abc})^n=abc$$

y como para elevar un monomio á una potencia, debe elevarse cada uno de sus factores, resulta:

$$(\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c})=abc$$

Por tanto, elevando cada uno de los miembros de las ecuaciones (1) y (2) á la potencia n, se obtiene:

$$abc=x^n$$
$$abc=y^n$$

luego $$x^n=y^n$$

y extrayendo la raíz n^{ma} se obtiene:

$$x=y$$

Siendo x igual á y, sus valores también lo serán, y se tendrá:

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}$$

que es lo que se debía demostrar.

Teorema II.—*La raíz del cociente de dos cantidades es igual al cociente de las raíces de estas cantidades.*

Representaremos por c el cociente de $\frac{a}{b}$

siendo $$c=\frac{a}{b}$$

se tiene $$bc=a$$

extrayendo raíz $$\sqrt[n]{bc}=\sqrt[n]{a}$$

y fundándonos en el teorema anterior, se tendrá:

$$\sqrt[n]{b}.\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a}$$

pasando $\sqrt[n]{b}$ al segundo miembro, resulta:

$$\sqrt[n]{c}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

que es lo que se debía demostrar.

Teorema III.—*La raíz de la potencia de una cantidad, es igual á la potencia de la raíz de la misma cantidad.*

Para elevar $\sqrt[m]{a}$ á la potencia p, tendremos que formar un producto en el que entre $\sqrt[m]{a}$ como factor tantas veces como unidades tenga p. Por tanto:

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\ldots\ldots\times\sqrt[m]{a}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^p\ldots(1)$$

Por el teor. I se obtiene:

$$\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{a}\ldots\times\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{a\times a\times a\ldots\times a}=\sqrt[m]{a^p}$$

y sustituyendo en la ecuación (1), se tiene finalmente:

$$\sqrt[m]{a^p}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^p$$

que es lo que se debía demostrar:

Teorema IV.—*La raíz, de grado m. de una expresión radical de grado n, es igual á la raíz, del grado mn indicado por el producto de los índices.*

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

Supongamos que $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=x\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

y que $\sqrt[mn]{a}=y\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

Elevando los dos miembros de la ecuación (1) á la potencia m se tiene:

$$\sqrt[n]{a}=x^m$$

elevando los de esta ecuación á la potencia n, resulta:

$$a=x^{mn}\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Elevando los dos miembros de la ecuación (2) á la potencia mn, se tiene:

$$a=y^{mn}\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

comparando las ecuaciones (3) y (4) resulta:

$$x^{mn}=y^{mn}$$

luego $x=y$

sustituyendo los valores de x é y, (ecuaciones (1) y (2)), resulta la igualdad

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}.$$

que demuestra el teorema.

Se puede invertir el orden de las operaciones sin alterar el resultado, esto es, extraer primero la raiz m y en seguida la n, ó al contrario.

El teorema precedente se extiende á la extracción de un número cualquiera de raíces sucesivas.

TEOREMA V.—*El valor de una expresión radical no se altera cuando se multiplican ó se dividen por una misma cantidad el índice del radical y el exponente de la cantidad colocada bajo el radical.*

Se trata de demostrar que

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$$

Como $$c=\left(\sqrt[p]{c}\right)^p$$

tendremos: $$\sqrt[m]{a^n}=\left(\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}}\right)^p \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Por el teorema IV $$\sqrt[p]{\sqrt[m]{a^n}}=\sqrt[mp]{a^n}$$

y por el teorema III $$\left(\sqrt[mp]{a^n}\right)^p=\sqrt[mp]{a^{np}}$$

sustituyendo sucesivamente los dos últimos valores en la ecuación (1) resulta:

$$\sqrt[m]{a^n}=\sqrt[mp]{a^{np}}$$

igualdad que demuestra la primera parte del teorema. Invirtiendo esta igualdad, esto es, poniendo el segundo miembro como primero, y este como segundo, quedará demostrada la segunda parte del teorema, supuesto que m y que n son respectivamente los cocientes de mp y de np divididos por p.

297.—TRANSFORMACIONES DE LOS RADICALES.—I. *Sacar fuera del radical uno ó varios factores.* Sea por ejemplo la expresión $\sqrt[m]{a^mb}$. Decimos que es igual á $a\sqrt[m]{b}$. En efecto, conforme al teor. I.

$$\sqrt[m]{a^mb}=\sqrt[m]{a^m}\times\sqrt[m]{b}=a\sqrt[m]{b}$$

luego $$\sqrt[m]{a^mb}=a\sqrt[m]{b}$$

Cuando se ejecuta esta transformación, se dice que *se saca fuera del radical una cantidad*, y para efectuarla se extrae del factor colocado dentro del radical la raiz que indica el índice.

Ejemplos: $\sqrt{4a^6b} = 2a^3\sqrt{b}$

$$\sqrt[3]{16a^5b^2}=\sqrt[3]{2^3 2a^3a^2b^2}=2a\sqrt[3]{2a^2b^2}$$

Sucede á menudo que no todos los factores de una expresión radical tienen raíz exacta; y en este caso fundándonos en la transformación anterior, se puede extraer la raíz de las cantidades que la tienen, y poner los resultados como factores de las que quedan dentro del radical.

Para determinar los factores de una expresión que tienen raíz exacta puede aplicarse la siguiente

Regla.—*Los coeficientes numéricos que están dentro del signo radical se descompondrán en sus factores primos, después de lo cual se dejarán sin variación los números y las literales cuyos exponentes sean menores ó iguales al índice del radical; y los factores numéricos ó literales cuyos exponentes sean mayores que el índice, se descompondrán en dos factores: uno de los cuales tendrá por exponente el índice del radical ó un múltiplo del índice, y el otro el exceso ó resta que quede al dividir cada exponente por el índice del radical.* Puesta la expresión en esa forma tendrán raíz exacta todos los factores cuyos exponentes sean iguales ó múltiplos del índice del radical; pudiendo estar los factores en el numerador ó en el denominador de la expresión.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{\dfrac{8a^6b^2}{d^5}}$ puede descomponerse en factores que tienen raíz exacta y en otros que no la tienen.

$$\sqrt[3]{\frac{8a^6b^2}{d^5}}=\sqrt[3]{\frac{2^3a^6}{d^3}\times\frac{b^2}{d^2}}=\frac{2a^2}{d}\sqrt[3]{\frac{b^2}{d^2}}$$

En virtud de lo expuesto, las expresiones radicales experimentan en los cálculos transformaciones y simplificaciones de mucho uso. Así por ejemplo:

$$\sqrt[3]{432}=2\sqrt[3]{54}=3\sqrt[3]{16}=6\sqrt[3]{2}; \quad \sqrt{nq^2}=q\sqrt{n}$$

$$\sqrt[5]{\frac{c^6d^3}{a^5}}=\frac{cd}{a}\sqrt[5]{cd^3}; \quad \sqrt{(3a^2-6ab+3b^2)}=(a-b)\sqrt{3}$$

$$\sqrt[4]{x^2y}+a\sqrt[4]{x^2y}+b\sqrt[4]{x^2y}=(1+a+b)\sqrt[4]{x^2y}$$

$$\sqrt{75}-4\sqrt{3}=\sqrt{25\times 3}-4\sqrt{3}=\sqrt{3}\,(5-4)=\sqrt{3}$$

$$\sqrt{75a^3b^2}-4\sqrt{3a^3b^2}=ab\sqrt{3a}$$

$$\frac{a}{b}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}+\frac{h}{g}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}=\frac{ag+bh}{bg}\sqrt[n]{\frac{c}{d}}$$

A las expresiones imaginarias se les suele dar otra forma, por ejemplo:

$$\sqrt[4]{-a^4}=a\sqrt[4]{-1};\qquad \sqrt[4]{-a^5}=a\sqrt[4]{-a}$$

expresando el producto de una cantidad real por una imaginaria.

II.—*Poner dentro del radical uno ó varios factores.* Sea como ejemplo la expresión $a\sqrt[n]{b}$ y decimos que es igual á $\sqrt[n]{a^n b}$.

En efecto, como $a=\sqrt[n]{a^n}$ sustituyendo su valor, se tiene:

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n}\cdot\sqrt[n]{b}$$

y según el teor. I.

$$\sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

luego

$$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$$

Se ve, pues, que para operar esta transformación, basta elevar el factor que se considera á la potencia que expresa el índice del radical y escribirlo dentro de éste; pudiendo formar parte del denominador de la expresión el factor que se quiere poner dentro del radical.

Por ejemplo, $2a\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{8a^3b}$

$$\frac{5a^2}{b^3}\times\sqrt[n]{\frac{d}{c}}=\sqrt[n]{\frac{5^n a^{2n} d}{b^{3n} c}}$$

III.—*Simplificar un radical.*—Cuando el índice de un radical y el *exponente* de la cantidad, ó de todos los factores que están dentro del radical tienen un factor común, se puede suprimir este sin alterar el valor de la expresión: $\sqrt[mp]{a^{sp}}=\sqrt[m]{a^s}$. Esta transformación tiene por fundamento el teorema V.

Por ejemplo $\sqrt[6]{a^4b^2}=\sqrt[3]{a^2b}$

$$\sqrt[m]{a^m}=a^1=a$$

$$\sqrt[n]{a^{ns}}=\sqrt[n]{(a^s)^n}=a^s$$

$$\sqrt[4]{81a^6b^{2n}}=\sqrt[4]{3^4a^6b^{2n}}=3\sqrt{a^3b^n}$$

IV.—*Reducir los radicales al mismo índice.* Esta transformación tiene por objeto, convertir varios radicales de índices diferentes, en otros respectivamente iguales á ellos, pero que tengan el mismo índice. Esta transformación presenta una gran analogía con la reducción de los quebrados al mismo denominador.

Sean los radicales

$$\sqrt[m]{a^s} \quad \text{y} \quad \sqrt[p]{a^q}$$

multiplicando m y s por p, y en el 2° radical p y q por m se obtienen los radicales:

$$\sqrt[mp]{a^{sp}} \text{ y } \sqrt[mp]{a^{mq}}$$

equivalentes á los primeros (teor. V) y con el mismo índice.

En general, *para reducir cualquier número de radicales al mismo índice, se multiplica el índice de cada radical y el exponente de cada uno de los factores numéricos ó literales que están dentro del signo radical por el producto de los índices de todos los demás.*

Cuando *los índices de los radicales no son primos entre sí*, se pueden reducir estos radicales á un índice igual á su menor múltiplo común. *En este caso el índice de cada radical es el menor múltiplo común, y los factores literales ó numéricos que están dentro del signo, se elevarán á la potencia que indique el cociente que resulta de dividir el menor múltiplo común por el índice del radical.*

Sean los radicales:

$$\sqrt[3]{3a^2} \times \sqrt{4a^3} \times \sqrt[5]{ab}$$

reducidos al mismo índice se transforman en sus iguales:

$$\sqrt[30]{3^{10}a^{20}} \times \sqrt[30]{4^{15}a^{45}} \times \sqrt[30]{a^6b^6}$$

Los radicales $\sqrt[4]{a}$ y $\sqrt[6]{b}$

siendo el menor múltiplo de los índices 12, se transforman en

$$\sqrt[12]{a^3} \quad \text{y} \quad \sqrt[12]{b^2}$$

Las expresiones:

$$2a\sqrt{ab}, \qquad \sqrt[3]{\frac{b^2}{d}} \qquad \text{y } 8a\sqrt[4]{\frac{bc^3}{d}}$$

se transforman en las siguientes:

$$2a\sqrt[12]{a^6b^6} \qquad \sqrt[12]{\frac{b^8}{d^4}} \qquad \text{y } 8a\sqrt[12]{\frac{b^3c^9}{d^3}}$$

298.—Operaciones con las expresiones radicales.—Hemos dicho que se consideran como radicales semejantes aquellos cuya parte radical es igual, y que se llama coeficiente de un radical la parte que está fuera del signo.

Para sumar y restar las expresiones radicales cuando éstas no son semejantes, solo se indican las operaciones; cuando los radicales son semejantes se suman y restan los coeficientes, y la suma ó diferencia de éstos se multiplica por la parte radical.

Por ejemplo:

$$4\sqrt[3]{ab^2}+(c+d)\sqrt[3]{ab^2}=(4+c+d)\sqrt[3]{ab^2}$$
$$3\sqrt{ab^3}-(c+d)\sqrt{ab^3}=(3-c-d)\sqrt{ab^3}$$

La ejecución de esa regla equivale á sacar como factor común la parte radical.

Para multiplicar ó dividir dos expresiones radicales, se reducen préviamente al mismo índice (297, IV) *y en seguida se multiplican ó dividen las cantidades que están fuera y las que están dentro del signo.*

El fundamento de esta regla es: 1º, que el valor de las expresiones radicales no cambia cuando se reducen al mismo índice; 2º, que cuando hay que multiplicar estas expresiones, conforme á las reglas generales de la multiplicación (247), deben multiplicarse separadamente los coeficientes y las literales, y hemos visto que el producto de dos radicales semejantes es igual á la raíz del producto de los factores que contiene (296); y 3º, que cuando deben dividirse, se sabe que la raíz de un quebrado es igual á la raíz del numerador dividida por la del denominador.

Sea como ejemplo:

$$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab};\quad 3\sqrt[4]{5a^2b}\times -5\sqrt[4]{ab}=-15\sqrt[4]{5a^3b^2}$$

$$3a\sqrt[6]{b}\times 5b\sqrt[8]{2c}=3a\sqrt[24]{b^4}\times 5b\sqrt[24]{8c^3}=15ab\sqrt[24]{8b^4c^3}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}};\quad \frac{5a\sqrt{b}}{2b\sqrt{c}}=\frac{5a}{2b}\sqrt{\frac{b}{c}},\quad \frac{12ac\sqrt{6bc}}{4c\sqrt{2b}}=3a\sqrt{3c}$$

$$\frac{15ab\sqrt[8]{2bc}}{3a\sqrt[6]{b}}=\frac{15ab\sqrt[24]{8b^3c^3}}{3a\sqrt[24]{b^4}}=5b\sqrt[24]{\frac{8c^3}{b}}$$

Vamos á explicar cómo se puede *sacar como factor común* **á c** en la expresión $(c+b)^2$.

No conteniendo todos los términos á c, multiplicaremos y dividiremos la expresión por esta cantidad, (257—3º) y como $c=(\sqrt{c})^2$ tendremos:

$$(c+b)^2=\frac{c}{c}(c+b)^2=c\left(\frac{c+b}{\sqrt{c}}\right)^2=c\left(\frac{c}{\sqrt{c}}+\frac{b}{\sqrt{c}}\right)^2$$

Saquemos á d^2 como factor común de la expresión $(d+b)^3$

$$(d+b)^3=\frac{d^2}{d^2}(d+b)^3=d^2\left(\frac{d+b}{\sqrt[3]{d^2}}\right)^3=d^2\left(\frac{d}{\sqrt[3]{d^2}}+\frac{b}{\sqrt[3]{d^2}}\right)^3$$

Por último, saquemos como factor común á a^m en la expresión $(a+b)^n$

$$(a+b)^n=\frac{a^m}{a^m}(a+b)^n=a^m\left(\frac{a}{\sqrt[n]{a^m}}+\frac{b}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^n$$

Al ejecutar la multiplicación y división de las expresiones radicales, la regla dada [248] para los signos, experimenta modificaciones en algunos casos. Así $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, siendo el cuadrado de $\sqrt{-a}$, el producto es $-a$, mientras que á primera vista parecería que debia dar $\sqrt{+a^2}=a$. Si observamos que $\sqrt{a^2}=\pm a$, la incertidumbre del signo no existe sino cuando se ignora si a^2 procede del cuadrado de $+a$ ó del de $-a$, lo cual no tiene lugar en el caso que consideramos, en el que debe desecharse el resultado $+a$.

De aquí deducimos que $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=-a$.

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-b}=\sqrt{a}\,\sqrt{-1}\times\sqrt{b}\,\sqrt{-1}=-\sqrt{ab}$$

Se verá igualmente que $\sqrt{-a}$ tiene por 1ª, 2ª, 3ª, 4ª.... potencias

$$\sqrt{-a},\quad -a,\quad -a\sqrt{-a}\;+a^2\ldots.$$

Para elevar una expresión radical á una potencia, se elevarán á esta potencia cada uno de sus factores, dejándolos dentro del signo. En caso de que el índice de la raíz sea múltiplo del exponente de la potencia, se dividirá el índice de la raíz por el exponente de la potencia.

Si tenemos que elevar, por ejemplo, $\sqrt{3a^2b}$ al cubo, fundándonos en el teorema III, número 396, tendremos que:

$$(\sqrt{3a^2b})^3=\sqrt{27a^6b^3}$$

que es lo que prescribe la 1ª parte de la regla.

Para demostrar la segunda parte de la regla haremos ver que

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

En efecto, acabamos de demostrar que

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}$$

pero como (296, V) una expresión radical no se altera cuando se multiplican ó dividen por un mismo número el índice del radical y los exponentes de las cantidades que están dentro del signo, resulta que

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[\frac{n}{m}]{a^{\frac{m}{m}}}=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

luego $$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[\frac{n}{m}]{a}$$

que es lo que se quería demostrar.

Así: $(\sqrt{3a^2b})^3=\sqrt{27a^6b^3}$, $(\sqrt{2})^3=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$(\sqrt[4]{9a^4b^6})^2=\sqrt{9a^4b^6}=\pm3a^2b^3$ $(\sqrt[6]{3a^2h})^3=\sqrt{3a^2h}=a\sqrt{3h}$

Si se tiene que elevar la cantidad b á la duodécima potencia, como 12 se puede descomponer en varios factoros $2\times2\times3$, y hemos visto que para elevar un monomio á una potencia, basta multiplicar su exponente por el de la potencia, tendremos:

$$a^{12}=\left((a^2)^2\right)^3$$

supuesto que $\left((a^2)^2\right)^3=a^{2\cdot2\cdot3}=a^{12}$ y que tanto en una como en otra expresión entre 12 veces a como factor del producto; pero además de que operando con un número el resultado se obtiene más brevemente por el procedimiento de elevaciones sucesivas, en Algebra es muchas veces conveniente descomponer una potencia en otras parciales.

Cuando el exponente de una potencia es múltiplo de otros números, el resultado será igual á la cantidad elevada sucesivamente á las potencias indicadas por los factores del exponente.

Por ejemplo: $a^4=(a^2)^2$; $a^6=(a^2)^3$; en general $a^{m.n}=(a^n)^m$

Para extraer la raíz de un monomio afectado de un radical, se multiplica el índice del radical por el grado de la raíz que ha de extraerse, y se dejan las cantidades que están dentro del signo sin variación. En el caso de que los coeficientes y las literales que están como factores dentro del radical tengan raíz exácta, se extraerá ésta á los coeficientes y se dividirán los exponentes de las literales por el grado de la raíz que se ha de extraer, dejando el índice sin variación.

La primera parte de la regla tiene por fundamento el teorema IV del núm. 296, supuesto que

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[mn]{a}$$

En cuanto al caso á que se refiere la segunda parte si tenemos:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}},$$

Como

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}}=\sqrt[mn]{a^{3n}}$$

y si dividimos por n tanto el índice mn como el exponente $3n$ (296) tendremos:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^{3n}}}=\sqrt[m]{a^3}$$

que es lo prescrito en la segunda parte de la regla.

Por ejemplo:

$$\sqrt[3]{\sqrt[4]{2a^2b}}=\sqrt[12]{2a^2b};\quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{c}}=\sqrt[mn]{c}$$

$$\sqrt{\sqrt[3]{\frac{4a^2b^4}{16c^4}}}=\sqrt[3]{\frac{2ab^2}{4c^2}}\qquad \sqrt[3]{\sqrt{\frac{27b^6d^3}{8a^3}}}=\sqrt{\frac{3b^2d}{2a}}$$

Fundándonos en el teorema IV del núm. 296, *cuando el índice de un radical pueda descomponerse en varios factores, la raíz podrá obtenerse extrayendo á la cantidad las raíces sucesivas que indican los factores del índice.*

Siendo $12=2\times2\times3$, $\quad\sqrt[12]{n}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{n}}}$

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3;\quad \sqrt[6]{15625}=\sqrt[3]{\sqrt{15625}}=\sqrt[3]{125}=5$$

$$\sqrt[8]{256a^8b^{10}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt{256a^8b^{10}}}}=\sqrt{\sqrt{16a^4b^5}}=\sqrt{4a^2b^2\sqrt{b}}=2ab\sqrt[4]{b}$$

$$\sqrt[m.n]{a}=\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$$

Esta transformación es útil para extraer las raíces superiores de los números cuando el grado de éstas es múltiplo del de la raiz cuadrada ó cúbica, operaciones que hemos enseñado á ejecutar en Aritmética; y para dar otra forma á algunas expresiones radicales.

299.—Expresiones con exponentes negativos.—Al ocuparnos de la división de las cantidades algebráicas, hemos demostrado que para dividir dos literales iguales se deben restar sus exponentes. Así

$$\frac{a^4}{a^2}=a^{4-2}=a^2;$$

pero si el exponente del divisor es mayor que el del dividendo, el resultado será un exponente negativo.

Si se tiene $\frac{a^2}{a^5}$ el resultado es igual á $a^{2-5}=a^{-3}$ y como la definición de exponente no es aplicable á esta clase de expresiones, es indispensable interpretar símbolos como el resultado a^{-3}. Tenemos por la regla de la división.

$$\frac{a^2}{a^5}=a^{-3}$$

Si dividimos por a^2 los dos términos del quebrado $\frac{a^2}{a^5}$ tendremos:

$$\frac{a^2}{a^5}=\frac{1}{a^3}$$

luego

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3}$$

En general, si quisiéramos averiguar cuál es el valor de a^{-p} tendríamos:

$$a^{-p}=x$$

multiplicando por a^p $\quad a^{-p}\times a^p=xa^p$

de donde (256) $\quad 1=xa^p$

despejando á x $\quad \frac{1}{a^p}=x$

luego $\quad a^{-p}=\frac{1}{a^p}$

De esto resulta, que *toda cantidad cuyo exponente es negativo, es el símbolo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y el denominador la cantidad tomada con exponente positivo.*

Cuando se tiene una expresión como a^{-3}, el exponente negativo indica las veces que la cantidad entra, no como factor, sino como divisor.

Hay en Algebra la ventaja de que una vez obtenida una fórmula, ésta da el valor que se busca, cualesquiera que puedan ser los datos cuyas relaciones expresa. Así la división de a^m por a^n es a^{m-n} cualesquiera que puedan ser los valores de estas cantidades, aunque algunos resultados sea necesario interpretarlos para comprender su sentido.

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

1º Si $m>n$, esto es, si $m=n+d$, tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^{n+d}}{a^n}=a^d$$

2° Si se tiene $m=n$, tendremos sustituyendo en la ecuación (1)

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^m}=a^0=1$$

la expresión a^0 por sí sola carece de sentido, pero observando que ha resultado de dividir una cantidad por sí misma, se comprende que es símbolo de la unidad.

3° Si se tiene $m<n$, esto es, $n=m+p$: sustituyendo este valor en la ecuación (1), tendremos:

$$\frac{a^m}{a^n}=\frac{a^m}{a^{m+p}}=a^{m-m-p}=a^{-p}$$

Por otra parte $$\frac{a^m}{a^{m+p}}=\frac{a^m}{a^m a^p}=\frac{1}{a^p}$$

luego $$a^{-p}=\frac{1}{a^p}$$

aquí se ha dividido una cantidad por otra mayor, y en consecuencia el resultado ha sido un quebrado.

Una vez explicada la significación de las expresiones con exponentes negativos en virtud de las operaciones de que resultan, podremos ejecutar con ellas los cálculos como si fueran cantidades exponenciales comunes, cambiando la forma del último resultado cuando sea necesario.

300.—Teorema.—*Toda cantidad puede pasar del numerador al denominador de un quebrado, y viceversa, con exponente de signo contrario.*

Demostración.—Sea la expresión $\frac{b}{ac^n}$ y vamos á demostrar que c^n puede pasar al numerador cambiándo el signo á su exponente.

Como el valor de un quebrado no se altera multiplicando sus dos términos por una misma cantidad, multiplicando los del propuesto por c^{-n} tendremos:

$$\frac{b}{ac^n}=\frac{bc^{-n}}{ac^n\,c^{-n}}=\frac{bc^{-n}}{a}$$

resultado que demuestra que una cantidad afectada de exponente positivo en el denominador, puede pasar al numerador con exponente negativo, y recíprocamente

Sea ahora la expresión: $$\frac{a}{bc^{-n}}$$

multiplicando los dos términos del quebrado por c^n se tiene:

$$\frac{a}{bc^{-n}}=\frac{ac^n}{bc^{-n}\,c^n}=\frac{ac^n}{b}$$

lo que demuestra que una cantidad con exponente negativo en el denominador puede pasar al numerador con exponente positivo ó viceversa.

301.—EXPRESIONES CON EXPONENTES FRACCIONARIOS POSITIVOS.—Hemos visto que para extraer la raíz de una cantidad, se divide el exponente de la cantidad por el índice de la raíz. (295) Así:

$$\sqrt[3]{a^6}=a^{\frac{6}{3}}=a^2;$$

pero si aplicamos la misma regla á los casos en que el exponente sea menor que el índice de la raíz ó en los que no sea divisible exactamente por él, obtendremos una cantidad afectada de un exponente fraccionario.

Sea $$\sqrt[3]{a^2}=a^{\frac{2}{3}}$$

y aunque un exponente fraccionario no puede indicar el número de veces que una cantidad entra como factor, teniendo á la vista las operaciones de donde ha provenido, se comprende que una cantidad afectada de un exponente fraccionario es el símbolo de la raíz de una cantidad elevada á la potencia indicada por el numerador del exponente, siendo el índice de dicha raíz el denominador del mismo exponente.

En general $$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{n}{m}}$$

ya sea $n>m,\quad n=m,\quad n<m.$

Demostraremos este principio de otra manera:

Sea $$a^{\frac{n}{m}}=x$$

elevando á m los dos miembros $a^n=x^m$

extrayendo la raíz m $$\sqrt[m]{a^n}=x$$

luego $$a^{\frac{n}{m}}=\sqrt[m]{a^n}$$

302.—EXPRESIONES CON EXPONENTES FRACCIONARIOS NEGATIVOS.—Cuando en el denominador de un quebrado hay una expresión radical cuyos exponentes no son divisibles exactamente por el índice de la raíz, se tendrá en el denominador una expresión con exponente fraccionario positivo, y si esta se pasa al numerador, el exponente cambia de signo y así se comprenderá la significación de esta especie de expresiones.

Sea $$\frac{a}{\sqrt{b^3}}=\frac{a}{b^{\frac{3}{2}}}=ab^{-\frac{3}{2}}$$

Si se tiene $$\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}=\frac{1}{a^{\frac{n}{m}}}=a^{-\frac{n}{m}}$$

luego toda cantidad cuyo exponente es fraccionario y negativo, es el símbolo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador es la raíz de la cantidad elevada á la potencia que indica el numerador del exponente, siendo el denominador el índice de la raíz.

Es un caso particular de esta clase de expresiones el de una radical cuyo índice sea negativo, como $\sqrt[-n]{a}$:

$$\sqrt[-n]{a}=a^{-\frac{1}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

luego $$\sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

En resumen se tiene:

$$a^0=1,\quad a^{-p}=\frac{1}{a^p},\quad a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m},\quad a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},\quad \text{y}\quad \sqrt[-n]{a}=\frac{1}{\sqrt[n]{a}}$$

303.—Cálculos con las cantidades afectadas de exponentes fraccionarios ó negativos.—*Las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división, elevación á potencias y extracción de raíces, se ejecutan con las cantidades afectadas de exponentes negativos ó fraccionarios, aplicando las reglas dadas para cuando los exponentes son enteros y positivos; cambiando la forma del último resultado cuando sea necesario.* Como según la definición de la palabra exponente no se deben considerar a^0, a^{-p}, $a^{\frac{m}{n}}$, $a^{-\frac{m}{n}}$ sino como símbolos ó expresiones de convención para indicar los valores

$$1,\ \frac{1}{a^p},\ \sqrt[n]{a^m},\ \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}},$$

demostraremos que en cualquier caso se obtiene el mismo resultado, efectuando una operación con las últimas expresiones ó con los símbolos que las representan, aplicando las reglas relativas á los exponentes positivos y enteros.

I.—Nos ocuparemos en demostrar que son exactos los resultados que se obtienen ejecutando las operaciones con las cantidades afectadas de exponentes negativos, por las reglas dadas para cuando los exponentes son positivos.

1.° Para multiplicar $a^m \times a^{-n}$ debemos reemplazar por a^{-n} su valor y tendremos:

$$a^m \times a^{-n} = a^m \times \frac{1}{a^n} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Si, sin hacer ninguna transformación en las expresiones, aplicamos la regla de los exponentes para la multiplicación, tendremos que sumarlos, esto es, debemos ponerlos unos á continuación de los otros con sus signos. Así:

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$$

resultado idéntico al obtenido ejecutando la operación con la expresión $\frac{1}{a^n}$

Igualmente $a^{-m} \times a^{-n} = \frac{1}{a^m} \times \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

Si, sin hacer ninguna transformación, ejecutamos la multiplicación sumando los exponentes, obtendremos el mismo resultado:

$$a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = \frac{1}{a^{m+n}}$$

2.° Sea por dividir $\frac{a^m}{a^{-n}} = \frac{a^m}{\frac{1}{a^n}} = a^{m+n}$

Restando los exponentes: $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$

Igualmente: $\frac{a^{-m}}{a^n} = \frac{\frac{1}{a^m}}{a^n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

Restando los exponentes: $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n} = \frac{1}{a^{m+n}}$

Sea $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = \frac{1}{a^m} \div \frac{1}{a^n} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Restando los exponentes: $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}$

3.°—Elevación á potencias: $(a^{-n})^p = \left(\frac{1}{a^n}\right)^p = \frac{1}{a^{np}}$

Multiplicando el exponente: $(a^{-n})^p = a^{-np} = \frac{1}{a^{np}}$

4.°—Extracción de raíces: $\sqrt[m]{a^{-n}} = \sqrt[m]{\frac{1}{a^n}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

Dividiendo el exponente: $\sqrt[m]{a^{-n}} = a^{-\frac{n}{m}} = \frac{1}{a^{\frac{n}{m}}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$

II.—Demostraremos que los cálculos ejecutados con las expresiones que tienen exponentes fraccionarios, por las reglas relativas á las de las cantidades con exponentes enteros, conducen á resultados exactos.

Con el objeto de dar con más facilidad la demostración de que nos ocupamos, consideraremos los radicales reducidos al mismo índice, y los exponentes fraccionarios reducidos al mismo denominador, transformaciones que como hemos visto (296) pueden hacerse sin alterar el valor de las respectivas expresiones.

1.°—Multiplicación: $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \times \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

Sumando los exponentes: $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m+p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m+p}}$

2.°—División: $a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \div \sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^p}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$

Restando los exponentes: $a^{\frac{m}{n}} \div a^{\frac{p}{n}} = a^{\frac{m-p}{n}} = \sqrt[n]{a^{m-p}}$

3.°—Elevación: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

Multiplicando el exponente: $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^p = a^{\frac{mp}{n}} = \sqrt[n]{a^{mp}}$

4.°—Extracción de raíces: $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = \sqrt[p]{\sqrt[n]{a^m}} = \sqrt[np]{a^m}$

Dividiendo el exponente: $\sqrt[p]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{np}} = \sqrt[np]{a^m}$

Otro tanto puede demostrarse por el mismo procedimiento cuando los exponentes fraccionarios son negativos, facilitándose siempre por este medio la ejecución de los cálculos.

Se ve, pues, que en todos los casos el resultado de las operaciones ejecutadas con los valores que representan las cantidades afectadas de exponentes negativos ó fraccionarios, es el mismo que se obtiene sujetando estas expresiones á las reglas dadas para cuando los exponentes son positivos ó enteros.

Por vía de ejercicio pondremos los siguientes ejemplos:

Reducción:

$$2ab^{\frac{1}{2}}-8ac^{-2}-ab^{\frac{1}{2}}-8dcb^{\frac{1}{2}}+5c^{-2}d^3+8ac^{-2}$$
$$=(a-8dc)\sqrt{b}+\frac{5d^3}{c^2}$$

Multiplicación:

$$ba^{-\frac{1}{2}}\times a^{\frac{7}{4}}\times a^{-\frac{1}{5}}=ba\sqrt[20]{a}$$

$$(5a^{\frac{7}{4}}-6aba^{-\frac{1}{4}})\ \ (a^{\frac{1}{3}}-7ba^{\frac{2}{3}})=(5a^2-6ba)\sqrt[12]{a}$$
$$+(42ab^2-35ba^2)\sqrt[12]{a^5}$$

División:

$$\frac{a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}=\sqrt[6]{a},\quad \frac{120ab^{\frac{1}{2}}}{3.5^{\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}=8\sqrt{5a}$$

Elevación:

$$\left(a^{\frac{4}{6}}\right)^3=a^2,\ \left(a^{-\frac{5}{6}}\right)^{12}=\frac{1}{a^{10}}$$

Extracción de raíces:

$$\sqrt[4]{\frac{a^2b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{2}{3}}\,b^{\frac{2}{3}}}}=\frac{a^{\frac{2}{4}}\ b^{\frac{1}{8}}}{a^{\frac{2}{12}}\,b^{\frac{2}{12}}}=a^{\frac{1}{3}}\,b^{-\frac{1}{24}}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[24]{b}}$$

Método para hacer racional el denominador de una fracción.—Cuando una fracción tiene el denominador irracional conviene muchas veces transformarla en otra cuyo denominador sea racional.

1.° *El denominador de la fracción es un monomio.* Sea la fracción $\frac{a}{\sqrt{b}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}$ se transforma en su equivalente $\frac{a\sqrt{b}}{b}$, cuyo denominador es racional.

Consideremos la fracción $\frac{a}{\sqrt[3]{b}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt[3]{b}\times\sqrt[3]{b}=(\sqrt[3]{b})^2$, se obtiene la fracción equivalente

$$\frac{a\,(\sqrt[3]{b})^2}{\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{b}.\sqrt[3]{b}}=\frac{a(\sqrt[3]{b})^2}{b}$$

cuyo denominador es racional.

2.° *El denominador de la fracción es un binomio.* Sea la fracción $\frac{a}{b+\sqrt{c}}$. Multiplicando sus dos términos por $b-\sqrt{c}$, se obtiene la fracción equivalente $\frac{a(b-\sqrt{c})}{b^2-c}$ cuyo denominador es racional.

Igualmente la fracción $\frac{a}{b-\sqrt{c}}$ equivale á $\frac{a(b+\sqrt{c})}{b^2-c}$.

Sea aún la fracción $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}$. Multiplicando sus dos términos por $\sqrt{b}-\sqrt{c}$ se obtiene la fracción equivalente $\frac{a(\sqrt{b}-\sqrt{c})}{b-c}$ cuyo denominador es racional.

Igualmente $$\frac{a}{\sqrt{b}-\sqrt{c}}=\frac{a(\sqrt{b}+\sqrt{c})}{b-c}$$

3.° *El denominador de la fracción es un trinomio.* Sea la fracción $\frac{a}{b+c+\sqrt{d}}$. Considerando el denominador como un binomio cuyo primer término es la suma $b+c$, y el segundo $\sqrt{d}$; multiplicando los dos términos de la fracción propuesta por $(b+c)-\sqrt{d}$, se obtiene la fracción equivalente $\frac{a[(b+c)-\sqrt{d}]}{(b+c)^2-d}$, cuyo denominador es racional.

Igualmente $$\frac{a}{b+c-\sqrt{d}}=\frac{a[(b+c)+\sqrt{d}]}{(b+c)^2-d}$$

Consideremos ahora una fracción cuyo denominador sea un trinomio, dos de cuyos términos son irracionales. Sea la fracción $\frac{a}{b+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$

Multiplicando sus dos términos por $b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, se obtiene la fracción equivalente $\frac{a[b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{b^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2}$ ó $\frac{a[b-(\sqrt{c}+\sqrt{d})]}{b^2-c-d-2\sqrt{cd}}$. El denominador de esta última puede ser considerado como un binomio cuyo primer término es la suma algebraica b^2-c-d, y el segundo $-2\sqrt{cd}$, que equivale al segundo caso que hemos examinado ya.

Consideremos en fin una fracción cuyo denominador tenga todos sus términos irracionales. Sea la fracción $\frac{a}{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$. Considerando el denominador como un binomio cuyo primer término es $(\sqrt{b}+\sqrt{c})$ y el segundo $\sqrt{d}$; multiplicando los dos términos de la fracción por $\sqrt{b}+\sqrt{c}-\sqrt{d}$, se obtiene la fracción equivalente $\frac{a[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-d}=\frac{a[(\sqrt{b}+\sqrt{c})-\sqrt{d}]}{b+c-d+2\sqrt{bc}}$ cuyo denominador está comprendido en el 2.° caso que resolvimos antes.

El método es tan sencillo que nos parece inútil ocuparnos en todas las combinaciones de signos que pueden presentar los términos del denominador.

4° *El denominador de la fracción es un cuatrinomio.* Sea por ejemplo este denominador: $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}$. Considerándolo como la suma de dos términos, de los cuales el primero es $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ y el segundo $(\sqrt{c}+\sqrt{d})$; multiplicando los dos términos de la fracción por la diferencia $(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, se obtendrá una fracción equivalente cuyo denominador será

$$a+b-c-d+2\sqrt{ab}-2\sqrt{cd}$$

y así se convertirá este caso en uno de los que se han resuelto antes.

Fórmula de Newton para elevar un binomio á cualquiera potencia.

304. —Elevación de un binomio á potencias sucesivas.—Hemos dicho que en la potencia de una cantidad, ésta entra tantas veces como factor como unidades tiene el exponente de la potencia; y por consiguiente, cuando no se tienen reglas para determinar el resultado, bastará multiplicar sucesivamente una cantidad por sí misma para formar la potencia que se quiera.

Para deducir las reglas correspondientes á la elevación de un binomio, elevaremos $(x+a)$ sucesivamente á la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, etc., potencia, y por analogía inferiremos lo que debe hacerse para determinar el resultado de otra cualquiera potencia que se busque; haciendo notar que hemos escogido un binomio cuyos términos son positivos y que carecen de coeficiente y de exponente; no siendo aplicables nuestras conclusiones, por tanto, sino á binomios de esta forma.

$(x+a)^1=x+a$
$(x+a)^2=(x+a)\,(x+a)$
$(x+a)^3=(x+a)^2(x+a)$
$(x+a)^4=(x+a)^3(x+a)$
$(x+a)^5=(x+a)^4(x+a)$

Ejecutando las operaciones indicadas obtendremos:

1º $(x+a)^1=x+a$
2º $(x+a)^2=x^2+2xa+a^2$
3º $(x+a)^3=x^3+3x^2a+3xa^2+a^3$
4º $(x+a)^4=x^4+4x^3a+6x^2a^2+4xa^3+a^4$
5º $(x+a)^5=x^5+5x^4a+10x^3a^2+10x^2a^3+5xa^4+a^5$

305.—Observaciones sobre los resultados que anteceden.—Si se examinan atentamente las cinco operaciones anteriores, en las que *el exponente del binomio es entero y positivo y los términos del binomio no tienen coeficientes ni exponentes*, se observará, que formados los resultados por la multiplicación sucesiva de la cantidad $(x+a)$, en todos y en cualquiera de ellos se verifican los siguientes principios:

1º *Los términos de que se compone la potencia de un binomio son homogéneos, estando indicado el grado de cada término por el exponente del binomio.*

La primera potencia de $[x+a]$ por su naturaleza es expresión homogénea teniendo cada término una dimensión. Para formar la segunda potencia habrá que multiplicar $[x+a]$ por $[x+a]$, esto es, dos factores homogéneos, y en consecuencia el producto, según se ha visto en la multiplicación [250—3ª], será homogéneo, y el grado de sus términos será igual á la suma de las dimensiones de un término del multiplicando y otro del multiplicador, esto es, tendrá *dos* dimensiones; número igual al exponente de la segunda potencia. Para formar la tercera potencia habrá que multiplicar la segunda potencia de $[x+a]$ por esta cantidad, y como el multiplicando, según acabamos de demostrar, es homogéneo y tiene dos dimensiones, y el multiplicador $[x+a]$ también lo es y consta de una dimensión; el producto [250—3ª] será homogéneo y tendrá *tres* dimensiones, número de unidades de que consta el exponente de la tercera potencia. Los razonamientos que anteceden pudiendo aplicarse á cualquiera potencia demuestran la verdad del principio de que nos ocupamos en toda su generalidad.

2º *El primer término de la potencia de un binomio es igual al primero del binomio elevado á la potencia de éste* $[x^n]$ *y el último término del resultado es el segundo término del binomio elevado á la misma potencia* $[a^n]$.

3° *Todos los términos del resultado, con excepción del primero y del último, están formados del producto de las dos literales del binomio.*

Cuando obtenemos una potencia cualquiera del binomio $(x+a)$ por multiplicaciones sucesivas, debiendo formarse el producto, de acuerdo con las reglas de la multiplicación de los polinomios, multiplicando todos los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador los términos de los productos parciales serán de tres clases: términos que provienen de multiplicar sucesivamente x por x por x.......; los que resultan de multiplicar a por a por a....., y los que se forman de multiplicar a por x y x por a. Ahora bien, conforme á lo demostrado en la multiplicación de polinomios (250—2°) en el producto final encontraremos forzosamente x^n y a^n, que respectivamente vienen á ser el primero y el último de nuestra serie, y también encontraremos algunos de los términos que resultan de multiplicar x por a y a por x, elevadas estas literales á determinadas potencias, á causa de que no son semejantes á x^n ni á a^n.

4° *Los exponentes del primer término del binomio van disminuyendo una unidad de un término á otro del desarrollo; teniendo por exponente en el primer término el de la potencia del binomio, y cero en el último.*

Cuando multiplicamos $(x+a)$ por $(x+a)$ para formar la 2ª potencia del binomio, debiendo multiplicar los términos del multiplicando por cada uno de los del multiplicador, el resultado contendrá x elevado á la 2ª potencia en el producto de x por x, á la 1ª potencia en el producto de x por a y un término independiente de x, (a^2), que podremos suponer multiplicado por la unidad igual á x^0. En consecuencia, se ve que la 2ª potencia de $(x+a)$ contiene á x con los exponentes 2, 1 y 0, en los términos consecutivos.

Si se multiplica el resultado $x^2+2xa+a^2$ por $(x+a)$ para obtener la 3ª potencia, al multiplicar los términos del multiplicando por x se formarán productos en los que x tendrá por exponente los números 3, 2 y 1, y además resultará un término a^3 que se podrá suponer multiplicado por x^0 igual á la unidad. El examen de las potencias sucesivas emanadas de multiplicaciones idénticas, nos comprueba en toda su generalidad la verdad que venimos demostrando.

5° *Los exponentes del segundo término del binomio van aumentando una unidad en cada término del desarrollo, siendo cero en el primer término de éste, é igual al grado de la potencia en el último.*

Siendo en el desarrollo de $(x+a)^n$ los exponentes

de x $\qquad$ n, n—1, n—2, n—3............0

y debiendo ser todos los términos del desarrollo homogéneos y tener por grado n, es forzoso que los exponentes de a sean respectivamente lo que á cada uno de los de x le falta para ser igual á n, esto es, los exponentes de a serán: 0, 1, 2, 3........n.

6º *El número de términos del desarrollo de la potencia de un binomio es igual al exponente de la potencia más una unidad, cuando el exponente es entero y positivo.*

Supuesto que el primer término del binomio está elevado á la potencia de éste en el primer término del desarrollo, y que su exponente va disminuyendo una unidad en cada uno de los términos siguientes hasta desaparecer en el último, se infiere que el número de términos será uno más que las unidades del exponente.

7º *La suma de los exponentes de cualquier término, es igual al exponente de la potencia del binomio.*

Esta observación es una consecuencia de que todos los términos del desarrollo han de ser homogéneos teniendo por grado el exponente de la potencia del binomio (1º) y de que estos términos (con excepción del primero y del último) están formados del producto de las literales del mismo binomio (3º).

8º *En los términos equidistantes de los extremos se observa que los exponentes son los mismos pero están invertidos.*

9º *Los coeficientes de los términos equidistantes de los extremos son iguales.*

Como la expresión $(x+a)^n$ se transforma en $(a+x)^n$ reemplazando a por x y x por a, y como el valor de $x+a$ es igual al de $a+x$, se infiere que si en el desarrollo de $(x+a)^n$ sustituimos x por a y recíprocamente a por x, obtendremos otra expresión equivalente en la que el último término tomará lugar de primero, el penúltimo de segundo, el antepenúltimo de tercero, etc., sin variar los coeficientes ni los exponentes; por tanto, para que esta transformación pueda verificarse sin otro cambio que el de la inversión de las literales x y a, es indispensable que en los términos equidistantes de los extremos los exponentes estén invertidos y que sus coeficientes sean iguales.

10º *El primer término del resultado tiene por coeficiente la unidad y los coeficientes de los demás términos se forman multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente que lleva el primer término del binomio, y dividiendo este producto por el número de términos que hay antes del que se va á formar.*

La exactitud de esta regla se comprueba en las cinco potencias que hemos formado con $(x+a)$ y en todas las siguientes que se formen, no siendo posible demostrar este principio sin conocer la teoría de las combinaciones (357).

11° *La suma de los coeficientes de todos los términos del desarrollo de un binomio elevado á cualquiera potencia, es igual al número 2 elevado á esa potencia.*

Para facilitar el raciocinio tomaremos como ejemplo $(a+b)^4$. Conforme á las reglas anteriores se tendrá:

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

Si en esta fórmula se hace $a=1$, $b=1$, se tendrá:

$$(1+1)^4=1^4+4.1^3 1+6.1^2 1^2+4.1.1^3+1^4$$

esto es $$2^4=1+4+6+4+1.$$

Se ve, pues, que cuando los dos términos del binomio son la unidad, se convierte el 2° miembro de la ecuación en la suma de los coeficientes de todos los términos, y el 1^er miembro se transforma en el número 2 elevado á la 4ª potencia; y como lo que hemos demostrado con esta potencia es común á cualquiera otra, se comprende en toda su generalidad la verdad del principio. Si las literales del binomio tienen coeficientes, la suma de los del desarrollo será igual á la suma de los coeficientes de los términos del binomio elevada á la potencia de este.

12° *Cuando los dos términos del binomio son positivos, todos los del desarrollo de su potencia lo son también. Cuando solamente uno de ellos es negativo, los términos del desarrollo en que entra este término elevado á una potencia par, irán afectados del signo más, y aquellos en que la cantidad negativa esté elevada á una potencia de grado impar, llevarán el signo menos. Cuando los dos términos del binomio son negativos, todos los del desarrollo son positivos cuando el exponente de la potencia sea par, y negativos cuando sea impar.*

La razón de esto es, que cuando se eleva á una potencia de grado par una cantidad, sea positiva ó negativa, el resultado siempre es positivo, y que cuando se eleva una cantidad á una potencia impar, el resultado lleva el mismo signo que la cantidad (294).

De esto, y de la regla de los signos en la multiplicación, (248) resulta que: cuando los dos términos del binomio son negativos, todos los del desarrollo son positivos cuando el exponente es par, y negativos cuando es impar. En general, *el signo de un término depende del que tengan los factores que lo forman.*

306.—Fórmula de Newton.—De los doce principios que anteceden se pueden considerar unos como fundamentales, siendo los otros consecuencia de ellos.

Para formar el desarrollo de la potencia de un binomio, es fundamental: que el primer término de la serie es igual al primero del binomio elevado á la potencia de éste, y el último de la serie es el segundo del binomio elevado á igual potencia: que todos los demás términos del *desarrollo están formados del producto de los términos del binomio, observándose que los exponentes del primer término van decreciendo, y los del segundo van aumentando una unidad de un término al siguiente, hasta llegar á ser el del primero cero, y el del segundo igual á la potencia del binomio; que el coeficiente del primero y del último término, es la unidad; que el coeficiente de un término cualquiera, se forma multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente que en él lleve el primer término del binomio, y dividiendo este producto por el número de términos que hay antes del que se va á formar; y que el signo de cada término depende del de los factores que lo forman.*

Tales son las reglas deducidas por Newton y cifradas en la siguiente fórmula, en la que están representadas todas las potencias de un binomio:

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.\,2}x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}a^3$$

$$+\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.2.3.4.}x^{m-4}a^4 + \ldots\ldots + \frac{m}{1}xa^{m-1} + a^m$$

Fórmula cuya exactitud puede verificarse dando á m los valores 1, 2, 3, 4, etc., y elevando directamente el binomio á la 1ª, 2ª, 3ª, 4ª, etc., potencia.

Una vez deducida esta fórmula general, podremos por medio de ella obtener la serie completa del desarrollo de la potencia de un binomio, ó bien determinar el valor de un término aislado cualquiera, sin necesidad de formar los demás.

Si consideramos uno de los términos de nuestra fórmula general, el 5°, por ejemplo, $\frac{m(m-1)\,(m-2)\,(m-3)}{1.2.3.4.}x^{m-4}a^4$, notaremos: 1°, que el coeficiente es un quebrado, formado el numerador así como el denominador de tantos factores como términos hay antes de él, (en nuestro caso de 4): 2°, los factores del numerador son el exponente m del binomio, y sucesivamente m disminuido de 1, de 2, de 3, etc., unidades; y los del denominador se forman con la serie natural de los números enteros 1, 2, 3, 4, etc.; 3°, que este coeficiente lo es del producto $x \times a$ de los dos términos del binomio, elevado cada uno á una potencia cuyo grado depende del orden del término que se considera, siendo siempre la suma de sus exponentes, $m-4$ y 4 igual al del binomio m; y 4°, el exponente del primer término x del binomio es m, disminuido de 4 unidades, que son los términos que hay antes del 5°; siendo este número 4 el exponente del 2° término a del binomio.

Generalizando podemos establecer la siguiente

Regla para formar un término aislado, de la serie de la potencia de un binomio, cuyo orden se conoce.—*Se verá primero cuántos términos debe haber antes del que se quiere formar: este número indicará los factores de que constará tanto el numerador como el denominador del coeficiente; el numerador se formará del producto del exponente del binomio, y de este mismo exponente disminuido sucesivamente de 1, 2, 3, etc. unidades, hasta completar el número de factores que hemos dicho: el denominador estará compuesto del producto de igual número de factores, siendo éstos los números enteros 1, 2, 3, 4, etc.: el quebrado así formado será el coeficiente del producto de los dos términos del binomio, elevado cada uno á la potencia respectiva: el exponente del primer término será el del binomio, disminuido de tantas unidades como términos hay antes del que se va á formar; y el exponente del segundo término será el número que indica cuántos términos precederían en la serie al que se considera. El signo del término dependerá del que deban tener sus factores.*

307.—Aplicaciones de la fórmula del binomio de Newton.—Pondremos algunos ejemplos por vía de ejercicio de la anterior fórmula.

I.—Se quiere conocer el valor de

$$(a-b)^6=a^6-6a^5b+15a^4b^2-20a^3b^3+15a^2b^4-6ab^5+b^6$$

$$(a+b)^{-3}=\frac{1}{(a+b)^3}=\frac{1}{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$$

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}+\tfrac{2}{3}a^{-\frac{1}{3}}x-\tfrac{1}{9}a^{-\frac{4}{3}}x^2+\tfrac{4}{81}a^{-\frac{7}{3}}x^3-\tfrac{7}{243}a^{-\frac{10}{3}}x^4+\text{etc.}$$

$$=\sqrt[3]{a^2}+\frac{2x}{3\sqrt[3]{a}}-\frac{x^2}{9\sqrt[3]{a^4}}+\frac{4x^3}{81a^2\sqrt[3]{a}}-\frac{7x^4}{243a^3\sqrt[3]{a}}+\text{etc.}$$

En algunos casos es cómodo sacar como factor común el primer término del binomio. En el ejemplo propuesto $(a+x)^{\frac{2}{3}}$ habría sido más fácil llegar al resultado final dando á esta expresión la siguiente forma:

$$(a+x)^{\frac{2}{3}}=\left(a(1+\frac{x}{a})\right)^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(1+\frac{x}{a})^{\frac{2}{3}}$$

y ejecutar después las operaciones y el desarrollo indicado.

Cuando hay que elevar un binomio á una potencia cuyo exponente es quebrado, es cómodo poner en lugar del quebrado una letra n, ejecutar la elevación y después sustituir por n su valor.

$$\text{II.}-\frac{1}{1-z}=(1-z)^{-1}=1^{-1}-1.\ 1.^{-2}(-z)+\frac{-1.-2.\,1^{-3}}{2}(-z)^2$$

$$+\frac{-1.-2.-3.\,1^{-4}}{2.3}(-z)^3+\ldots\ldots$$

$=1+z+z^2+z^3+$ . . . . . resultado que puede comprobarse dividiendo 1 por $1-z$.

III.—Sea $(a+b-c)^4$. Haremos primero $(b-c)=d$, desarrollaremos la potencia de $a+d$, y luego reemplazaremos por d su valor elevado á sus respectivas potencias.

$$[a+b-c]^4=[a+d]^4$$
$$[a+d]^4=a^4+4a^3d+6a^2d^2+4ad^3+d^4$$
$$[a+b-c]^4=a^4+4a^3[b-c]+6a^2[b-c]^2+4a[b-c]^3+[b-c]^4$$
$$[a+b-c]^4=a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2[b^2-2bc+c^2]+4a(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)$$
$$+b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$$
$$[a+b-c]^4=a^4+4a^3b-4a^3c+6a^2b^2-12a^2bc+6a^2c^2$$
$$+4ab^3-12ab^2c+12abc^2-4ac^3+b^4-4b^3c+6b^2c^2-4bc^3+c^4$$

Por este procedimiento puede elevarse á cualquiera potencia un trinomio y un polinomio, sea cual fuere el número de sus términos.

IV.—Sea por último determinar el 6º término de la serie $(a-b)^8$. Habrá antes del término que se va á formar 5 términos, y este número 5 nos indica los factores de que constará tanto el numerador como el denominador del coeficiente, así como las unidades que hemos de disminuir del exponente 8 para formar el de a, y el exponente del 2º término b,

El término será $\frac{8(8-1)\ (8-2)\ (8-3)\ (8-4)}{1.2.3.4.5.}a^{8-5}b^5$

ejecutando las restas y poniendo el signo, se tiene:

$$-\frac{8.7.6.5.4.}{1.2.3.4.5.}a^3b^5$$

ponemos el signo menos porque la cantidad negativa b está elevada á una potencia impar.

Reduciendo, resulta que el término 6º de la serie será:

$$-56a^3b^5$$

Como comprobación debe tenerse que el coeficiente ha de ser número entero, y que la suma de los exponentes $3+5$ ha de ser igual al exponente de la potencia del binomio.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

308.—DEFINICIONES.—Se dice que una ecuación es de 2° grado cuando contiene la incógnita elevada á la 2ª potencia, como x^2 ó cuando contiene un producto de dos incógnitas como $x\,y$; y como cuando una cuestión matemática conduce á una ecuación de esta naturaleza no es posible resolverla por medio de las reglas dadas, vamos á ocuparnos en este capítulo de indicar los procedimientos que deben emplearse en tales casos.

Puede suceder que una ecuación no contenga más que el cuadrado de la incógnita en uno ó en varios términos sin contener la incógnita elevada á la 1ª potencia, como $3x^2=b$. En este caso la ecuación de 2° grado se llama *pura*, *incompleta* ó de *dos términos.*

Se le llama de *dos términos* porque por complicada que sea una ecuación, siempre puede reducirse á la forma $ax^2=b$, que consta de dos términos únicamente.

Por ejemplo $\qquad x^2+7+\frac{x^2}{2}=80-\frac{x^2}{6}-6x^2$

Quitando los denominadores $\qquad 6x^2+42+3x^2=480-x^2-36x^2$

Trasladando y reduciendo $\qquad 46x^2=438$

haciendo $46=a$, $438=b$, se tiene la primera ecuación reducida á la forma: $\qquad ax^2=b$

Cuando una ecuación de 2° grado, además del cuadrado de la incógnita contiene ésta elevada á la primera potencia, se le llama *mixta, completa* ó de *tres términos.*

En este caso por complicada que sea la ecuación, quitando los denominadores, trasladando y reduciendo se podrá reducir á la forma general

$$ax^2\pm bx=\pm c$$

ecuación que consta de tres términos.

Sucede á veces que una ecuación parece á primera vista de primer grado siendo de segundo. Por ejemplo:

$3ax+10-\frac{b}{x}=a$, contiene x elevada solamente á la primera potencia, pero quitando los denominadores da

$3ax^2+10x-b=ax$ ecuación que realmente es de 2° grado.

Recíprocamente la ecuación: $ax-3x^2=8x$ que parece de 2° grado, dividiendo todos sus términos por x se transforma en otra de primer grado. En consecuencia, para determinar el grado de una ecuación es necesario préviamente ejecutar las operaciones indicadas, quitar los denominadores y radicales, y simplificar, cuando es posible, dividiendo por la incógnita todos los términos.

309.—Ecuaciones incompletas de segundo grado.—Hemos dicho qu ecuación incompleta de segundo grado es aquella en la que la incógnita está elevada únicamente á la segunda potencia. Para resolver una ecuación de este género, se sigue la siguiente:

Regla.—*Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro de la ecuación todos los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se saca como factor común á x^2: se divide el segundo miembro de la ecuación por el factor x^2: y el valor de x será igual á la raíz cuadrada del segundo miembro, tomando el resultado con el signo de ambigüedad* $\pm$

Por ejemplo: $$\frac{3x^2}{2}+a+x^2=\frac{bx^2}{4}+20$$

quitando los denominadores $6x^2+4a+4x^2=bx^2+80$

trasladando $6x^2+4x^2-bx^2=80-4a$

reduciendo y sacando como factor $x^2[10-b]=80-4a$

despejando á x^2 $$x^2=\frac{80-4a}{10-b}$$

extrayendo la raíz á los dos miembros $$x=\pm\sqrt{\frac{80-4a}{10-b}}$$

El fundamento de las cuatro primeras operaciones lo hemos dado ya al tratar de las ecuaciones de primer grado. La última está fundada en que las raíces cuadradas de cantidades iguales, son iguales, y en que la raíz algebraica de una cantidad tiene dos valores iguales con signo contrario (289).

Toda ecuación incompleta de segundo grado después de haber quitado los denominadores, de haber trasladado al primer miembro los términos que contienen x^2 y al segundo los demás, y de haber sacado x^2 como factor común, puede reducirse á la forma general.

$$ax^2=b$$

de la que se saca $$x=\pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

En general x tendrá dos valores: uno positivo y otro negativo, pudiendo desecharse uno de ellos por alguna condición especial del problema.

Si $\frac{b}{a}$ fuese negativo la cuestión sería absurda ó imposible, porque hemos demostrado (295) que la raíz par de una cantidad negativa es un valor imaginario.

De lo expuesto se infiere el método que deberá emplearse para resolver una ecuación *pura* de grado superior.

Si $x^{2n}=c$ se tendrá: $x=\pm\sqrt[2n]{c}$

si $x^{2n}=-c$ el valor es imaginario

y si $x^{2n+1}=\pm c$ se tendrá: $x=\sqrt[2n+1]{\pm c}$

310.—Ecuaciones completas de segundo grado.—A este género de ecuaciones, después de haber quitado los denominadores, de haber trasladado al primer miembro de la ecuación los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás, y de haber sacado como factor común x^2 y x se le podrá dar la forma

$$ax^2\pm bx=\pm c\ldots\ldots..(1)$$

el término ax^2 podrá hacerse siempre positivo cambiando signos á todos los términos de la ecuación cuando sea necesario.

Dividiendo por a

$$x^2\pm\frac{b}{a}x=\pm\frac{c}{a}\ldots\ldots..(2)$$

si para simplificar hacemos $\frac{b}{a}=p$, y $\frac{c}{a}=q$,

la ecuación [2] tomará la forma

$$x^2\pm px=\pm q\ldots\ldots.(3)$$

Para transformar esta ecuación en otra de primer grado debemos procurar que el miembro en que entra x^2 sea un cuadrado perfecto, para que extrayendo la raíz cuadrada á los dos miembros desaparezca el cuadrado de la incógnita. A este fin recordaremos que un binomio no puede ser el cuadrado de ninguna expresión algebraica, y que para que un binomio pueda tener raíz cuadrada es necesario que dos de sus términos sean positivos y cuadrados perfectos, y que el otro término sea igual al doble producto de las raíces de los otros dos (290). Por tanto, para lograr nuestro objeto debemos convertir el binomio $x^2\pm px$ en un trinomio que satisfaga esas condiciones. Representando por y^2 el término que se debe agregar al binomio, tendremos:

$$x\ \pm px+y^2=(x\pm y)^2$$

desarrollando: $x^2\pm px+y^2=x^2\pm 2xy+y^2$

suprimiendo los términos iguales en los dos miembros y despejando á y, se tiene:

$$y=\frac{p}{2}$$

é
$$y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

En consecuencia, si á los dos miembros de la ecuación

$$x^2 \pm px=\pm q$$

les agregamos el cuadrado de la mitad de p, no se alterará y se transformará en

$$x^2 \pm px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}\pm q$$

el primer miembro de la cual tiene raíz exacta (290). Si después de haber agregado el cuadrado de la mitad del factor de x extraemos raíz á los dos miembros de la ecuación, obtendremos la ecuación de primer grado:

$$x\pm\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}\pm q}$$

trasladando al segundo miembro $\pm\frac{p}{2}$ se obtiene definitivamente el valor de

$$x=\mp\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}\pm q} \;\;\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

En lo que antecede se funda la siguiente

Regla para la resolución de las ecuaciones de segundo grado.—*Se quitan los denominadores: se trasladan al primer miembro los términos que contienen la incógnita y al segundo los demás: se sacan* x^2 *y* x *como factores comunes, se hace que el cuadrado de la incógnita no tenga coeficiente y que sea positivo. En seguida se completa el cuadrado agregando á los dos miembros de la ecuación el cuadrado de la mitad del factor de* x: *se extrae la raíz cuadrada de los dos miembros y se despeja* x.

Por ejemplo, sea por resolver la ecuación:

$$\tfrac{10}{2}x-2x^2=\tfrac{9}{8}$$

Quitando los denominadores:

$$40\,x-16x^2=9$$

Quitando el coeficiente de x^2

$$\tfrac{40}{16}x-x^2=\tfrac{9}{16}$$

Cambiando los signos:

$$x^2-\tfrac{40}{16}x=-\tfrac{9}{16}$$

Completando el cuadrado:

$$x^2-\tfrac{40}{16}x+(\tfrac{40}{32})^2=(\tfrac{40}{32})^2-\tfrac{9}{16}$$

Extrayendo la raíz:

$$x-\tfrac{40}{32}=\pm\sqrt{(\tfrac{40}{32})^2-\tfrac{9}{16}}$$

Despejando á x $$x=\frac{40}{32}\pm\sqrt{\left(\frac{40}{32}\right)^2-\frac{9}{16}}$$

Simplificando los quebrados $$x=\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}\pm\frac{4}{4}$$

Los valores de x serán: $$x=\frac{9}{4},\ \text{ó}\ x=\frac{1}{4}$$

Una vez traida la ecuación á la forma $x^2\pm px=\pm q$, no es necesario completar el cuadrado, ni extraer la raíz y despejar á x; pues comparando la ecuación (3) con la (4), que ha sido el resultado de estas operaciones, se infiere que el valor de la incógnita puede determinarse, desde luego, por la siguiente:

Regla.—*El valor de* x *en una ecuación de segundo grado reducida á la forma* $x^2\pm px=q$ *es igual á la mitad del factor de* x *tomado con signo contrario, más ó menos la raíz cuadrada del cuadrado de esta mitad y de las cantidades conocidas, tomadas con los signos que lleven en el segundo miembro de la ecuación.*

Así en $x^2+px=q$, se tiene, $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

y en $x^2-px=-q$, se tiene $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

Esta regla es de muy frecuente aplicación.

Por ejemplo, la ecuación $x^2+6x=27$
da inmediatamente $x=-3\pm\sqrt{9+27}$

$x=3,$ ó $x=-9$

Ejercicios.—Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

$$\frac{x}{a}+\frac{a}{x}=\frac{b}{x}+\frac{x}{b}$$

Resolución $x=\pm\sqrt{ab}$

$$\frac{x-a}{b}-1=\frac{b+x}{x}$$

R. $$x=\frac{a+2b\pm\sqrt{a^2+4ab+8b^2}}{2}$$

$$\frac{a-b}{4[x-a]}+\frac{x+2b}{a+b}=2$$

R. $$x'=\frac{3a+b}{2},\quad x''=\frac{3a-b}{2}$$

$$6[x-\tfrac{1}{2}]\ [x+\tfrac{1}{3}]=0$$

R. $$x'=\tfrac{1}{2},\qquad x''=-\tfrac{1}{3}$$

311.—Problemas de segundo grado.—Para plantear los problemas de segundo grado, se sigue la regla dada [264] para los de primer grado: la dificultad consiste en comprender la cuestión, y en expresar las condiciones del problema con ayuda de los signos algebraicos y del corto número de operaciones que conocemos.

I.—Una persona vende un anillo en 11 pesos, y haciendo la cuenta de la ganancia que ha tenido sobre el precio de compra, resulta que ha ganado por 100, tanto cuanto le costó el anillo: se quiere saber el precio del anillo.

Llamándole x, la ganancia será $11-x$, y tendremos:

$$x : 11-x :: 100 : x$$

formando el producto de extremos y medios

$$x^2=1100-100x$$
$$x^2+100x=1100$$
$$x=-50\pm\sqrt{50^2+1100}$$

lo que da $x=+10$, desechando el valor negativo.

II.—Encontrar un número tal, que sumándolo con 94, y restándolo de este número, el producto de la suma por la diferencia, sea 8512.

$$(94+x)\ (94-x)=8512$$

Resolviendo la ecuación se obtiene:

$$x=18$$

III.—Habiéndose hecho un gasto de 800 pesos entre varias personas, resultó en el momento de hacer el pago, que 3 de ellas no tenían con qué pagar su parte, motivo por el cual cada una de las restantes tuvo que dar $60 más de lo que antes le correspondía. Se pregunta ¿cuál es el número total de personas que debían cubrir los 800 pesos?

Llamando x el número de personas se tiene la ecuación:

$$\frac{800}{x}=\frac{800}{x-3}-60$$

Resolviéndola se obtiene $x=8$

IV.—Dividir a en dos partes tales que m veces la primera, multiplicada por n veces la segunda, dé por producto p.

Si una parte es x la otra será $a-x$, y se tiene la ecuación:

$$mx.n(a-x)=p$$

la que da
$$x=\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{p}{mn}\right)}$$

V.—Hallar dos números cuya suma sea 60, y la suma de sus cuadrados 1872.

Un número será x, y el otro $60-x$. El problema se planteará como sigue:

$$x^2+(60-x)^2=1872$$

desarrollando y resolviendo esta ecuación se tiene:

$$x=36$$
$$60-x=24$$

312.—Ecuaciones de segundo grado con varias incógnitas.—Para resolver los problemas que dan lugar por lo menos á una ecuación de segundo grado y á tantas ecuaciones como incógnitas, se emplea uno de los tres métodos de eliminación que dejamos explicados al tratar de las ecuaciones de primer grado; pero debemos advertir que algunas veces se obtiene una ecuación final de más de segundo grado en la cual tendrá que emplearse algún artificio de cálculo con el objeto de reducirla siempre que sea posible al segundo grado.

313.—Problemas.—I. Encontrar dos números cuyo producto sea 750, y cuyo cociente sea $3\frac{1}{3}$.

Tendremos $xy=750$............(1)

$$\frac{x}{y}=3\tfrac{1}{3}\text{...........}(2)$$

La 2.ª ecuación da $x=3\frac{1}{3}y$......(3)

Sustituyendo en la 1.ª: $3\frac{1}{3}y^2=750$

Despejando á $y=\sqrt{\frac{750}{3\frac{1}{3}}}=\sqrt{\frac{2250}{10}}=\pm 15$

Sustituyendo en la (3) $x=3\frac{1}{3}\times 15=\frac{150}{3}=50$

En general este problema tiene por objeto encontrar dos números cuyo producto sea a y cuyo cociente sea b,

Se tiene $xy=a$, $\frac{x}{y}=b$

Resolviendo este sistema de ecuaciones se obtiene

$$x=\sqrt{ab},\quad y=\sqrt{\frac{a}{b}}$$

y de estas fórmulas puede hacerse una aplicación al problema propuesto.

II. Encontrar dos números que estén en la razón de 3 : 4, y que la suma de sus cuadrados sea igual á 324900.

Tendremos: $\frac{x}{y}=\frac{3}{4}$ $\qquad x^2+y^2=324900$

Despejando á x $\qquad x=\frac{3}{4}y$

Sustituyendo en la 2.ª ecuación: $\frac{9}{16}y^2+y^2=324900=\frac{25}{16}y^2$

Despejando á y $\qquad y=\sqrt{\frac{16\times 324900}{25}}=456$

Sustituyendo en el valor de x, $\qquad x=\frac{3}{4}\times 456=342$

Resuelto este problema considerándolo de un modo general, tendremos que buscar dos números cuyos valores estén en la relación $\frac{m}{n}$ y la suma de sus cuadrados sea s.

Tendremos $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$ $\quad x^2+y^2=s$

y resueltas dan: $\qquad x=\frac{m\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}}$ $\quad y=\frac{n\sqrt{s}}{\sqrt{m^2+n^2}}$

III. Encontrar tres números tales que si se multiplican de dos en dos, y cada uno de los tres productos se divide por el otro número que no entra en él como factor, se obtienen los cocientes a, b, c.

Tendremos $\frac{xy}{z}=a,\quad \frac{xz}{y}=b,\quad \frac{yz}{x}=c$

quitando los denominadores tendremos el sistema de tres ecuaciones.

$$xy=az$$
$$xz=by$$
$$yz=cx$$

Despejando á $x=\frac{az}{y}$ y sustituyendo en las dos siguientes se obtiene:

$$az^2=by^2$$
$$y^2z=caz$$

Despejando á $y^2=\frac{az^2}{b}$ y sustituyendo en la siguiente

$\frac{az^2}{b}=ca$, de donde $\quad z=\sqrt{bc}$

Sustituyéndolo en el valor de y^2 se tiene $y=\sqrt{ac}$

y estos en el valor de $x=\frac{az}{y}$ da $x=\sqrt{ab}$

DISCUSION DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

314.—Raíces de las ecuaciones de segundo grado y propiedades de las raíces.—Frecuentemente sucede en Algebra que después de haber obtenido un resultado, es conveniente *examinar qué alteraciones produce en dicho resultado determinada variación del valor de algunas de las cantidades que lo forman, con el objeto de descubrir todas las relaciones que existen entre las cantidades conocidas y las desconocidas en el caso ó cuestión que se considera y en todos los semejantes, y esto es lo que en Algebra se llama discutir.*

En este capítulo nos ocuparemos en discutir las ecuaciones de segundo grado, á fin de determinar las relaciones que hay entre todas las cantidades qne las forman.

Según hemos dicho, las ecuaciones de segundo grado pueden ser puras ó mixtas, según que contengan la incógnita elevada solamente á la segunda potencia, ó que la contengan elevada á la segunda y también á la primera potencia; y hemos demostrado (309) que en ambos casos la incógnita tiene dos valores que satisfacen igualmente la ecuación. Vamos ahora á demostrar esto mismo siguiendo otro procedimiento.

I.—Sea la ecuación incompleta ó pura en su forma más simple y general:

$$x^2=a \dots\dots\dots (1)$$

si se supone que r sea un valor de x que satisface la ecuación, tendremos:

$$r^2=a \dots\dots\dots (2)$$

Restando la ecuación (2) de la (1), se obtiene:

$$x^2-r^2=0$$

Sustituyendo por x^2-r^2 su valor [251] $(x+r)\ (x-r)$ se tiene:

$$(x+r)\ (x-r)=0$$

y como para que el producto de dos cantidades sea igual á cero, es necesario que uno de los dos factores sea igual á cero, pudiendo serlo cualquiera de ellos, tendremos qne para que subsista la anterior ecuación es necesario tener $x+r=0$, ó bien $x-r=0$, verificándose la ecuación, tanto con la primera condición como con la segunda.

De la 1ª ecuación de condición $x+r=0$ se saca $x=-r$

De la 2ª ecuación de condición $x-r=0$ se saca $x=r$.

Luego en toda ecuación pura de 2º grado, x *tendrá dos valores que diferirán en el signo.*

II.—Sea la ecuación mixta de 2º grado en su forma más simple y general:

$$x^2+px+q=0\ldots\ldots(1)$$

sobrentendiéndose que x, p y q pueden tener cualquier signo. Si suponemos que el valor r dado á x verifica esta ecuación, tendremos:

$$r^2+pr+q=0\ldots\ldots(2)$$

restando la (2) de la (1) $\qquad x^2-r^2+p\,(x-r)=0$
poniendo por x^2-r^2 su valor $\qquad (x+r)\,(x-r)+p\,(x-r)=0$
sacando $(x-r)$ como factor común, se tiene:

$$(x-r)\,(x+r+p)=0\ldots\ldots(3)$$

para que esta ecuación se verifique, es preciso que se satisfaga una de las dos ecuaciones de condición siguientes, verificándose con cualquiera de ellas:

$$x-r=0$$
$$x+r+p=0$$

la 1ª da para x el valor $\qquad x=r$
la 2ª da: $\qquad x=-r-p$

Se ve, pues, que en toda ecuación mixta de 2º grado, la incógnita tiene dos valores, y que si uno de ellos es r, el 2º valor se determina cambiándole signo y restando el coeficiente p que en la ecuación lleva x.

Definición.—*Estos valores de la incógnita, que sustituidos en lugar de ella en la ecuación, hacen el primer miembro idéntico al segundo, se llaman raíces de la ecuación.*

r y $-r-p$ son las raices de la ecuación $x^2+px+q=0$

Si llamamos r' la 2ª raíz, cuyo valor es $-r-p$, fácilmente podremos deducirlo del de r cuando esta raiz sea conocida. Por ejemplo: sabemos que uno de los valores de x de la ecuación

$$x^2+px+q=0$$

es $\qquad x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}, \qquad$ que llamaremos r

$$r=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Conforme á la regla anterior se tendrá:

$$r'=-r-p=+\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}-p=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$r'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

que es el segundo valor de x que se obtiene por el método común.

III.—Supuesto que de la ecuación

$$x^2+px+q=0 \ldots\ldots(1)$$

llamando r una de sus raíces, hemos obtenido, [ecuación (3)]

$$(x-r)\,(x+r+p)=0 \ldots\ldots(2)$$

y como $r'=-r-p$. cambiando signos $-r'=r+p$
sustituyendo en la ecuación [2] se transforma en

$$(x-r)\,(x-r')=0 \ldots\ldots(3)$$

comparando la [1] con la [3], tendremos:

$$x^2+px+q=(x-r)\,(x-r')$$

Este resultado nos hace ver que *en toda ecuación de la forma*

$$x^2\pm px\pm q=0$$

el primer miembro es igual al producto de las diferencias entre x *y las raíces* r *y* r' *de la ecuación, esto es, á* (x—r) (x—r').

En el caso de que las dos raíces sean iguales, el trinomio $x^2\pm px\pm q$ será un cuadrado perfecto, supuesto que siendo $r=r'$ se tendrá

$$x^2\pm px\pm q=(x-r)^2$$

IV.—Una vez que las raíces de la ecuación

$$x^2+px+q=0$$

son

$$r=-\frac{p}{2}+\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)} \ldots\ldots(1)$$

$$r'=-\frac{p}{2}-\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)} \ldots\ldots(2)$$

sumando estas ecuaciones se tiene:

$$r+r'=-p$$

luego *la suma de las raíces de una ecuación de la forma* $x^2+px+q=0$ *es igual al coeficiente* p *de* x *tomado con signo contrario al que tiene en la ecuación.*

V.—Si se multiplica la ecuación [1] por la [2], atendiendo á que la primera es la suma de $-\frac{p}{2}$ con la expresión radical $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ y la [2] es la diferencia de las mismas cantidades, y se recuerda que el producto de la suma de dos cantidades multiplicada por su diferencia es igual á la diferencia de sus cuadrados, [251] se tiene:

$$r\,r'=\left(-\frac{p}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}-q\right)}\right)^2=\frac{p^2}{4}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)$$

reduciendo $rr'=q$

luego *el producto de las raíces de la ecuación* $x^2+px+q=0$ *es igual al término conocido* q *afectado del signo que tiene en el primer miembro de la ecuación.*

Sea por ejemplo $x^2+6x-27=0$

resolviéndola se tiene $x=-3\pm\sqrt{27+9}$

las raíces de la ecuación serán $r=3$, y $r'=-9$

la segunda raíz debe ser igual á -3, menos 6, coeficiente de x, $=-9$; $(x-r)(x-r')=(x-3)(x+9)=x^2+6x-27$, que es el primer miembro de la ecuación.

La suma de las raíces $r+r'=3-9=-6$

coeficiente de x con signo contrario al que tiene en la ecuación.

El producto de las raíces $r\,r'=3\times-9=-27$ valor del término conocido con el signo que tiene en el primer miembro de la ecuación.

VI.—Conocidas las raíces de una ecuación de 2° grado se puede reconstruir ésta, supuesto que la suma de las raíces expresa el coeficiente de x con signo contrario, y que su producto es el valor de q, cantidad conocida independiente de x con el signo que tiene en el primer miembro de la ecuación.

Si, por ejemplo, conocidas las raíces de una ecuación de 2° grado cuyos valores son 3 y -9, se quiere reconstruir la ecuación de donde proceden, tomaríamos la suma $3-9=-6$ con signo contrario para coeficiente de x, y su producto $3\times-9=-27$ para valor del término conocido en el primer miembro de la ecuación, la cual sería:

$$x^2+6x-27=0$$

Igualmente podría obtenerse esta ecuación, formando el producto de $(x-r)$ por $(x-r')$

$$(x-r)(x-r')=(x-3)(x+9)=x^2-3x+9x-27=x^2+6x-27$$

VII.—De la propiedad que tienen las raíces de una ecuación de 2° grado de dar por suma el coeficiente del 2° término con signo contrario y por producto el término conocido en el primer miembro de la ecuación, se deduce que la resolución de toda ecuación de 2° grado, reducida á la forma general $x^2+px+q=0$ consiste en buscar dos números cuya suma sea $-p$, y cuyo producto sea q.

Por ejemplo, si se quiere resolver la ecuación

$$x^2+6x-27=0$$

la cuestión se reduce á buscar dos números cuya suma sea -6, y cuyo producto sea -27; cuestión que conduce á la resolución de una ecuación mixta de 2° grado.

Así, pues, de lo que hemos expuesto en este párrafo se infiere:

1º Que toda ecuación pura de 2º grado tiene dos raíces del mismo valor numérico, pero de signos contrarios.

Por ejemplo, si se tiene $x^2=64$
los valores de x serán dos $+8$, y -8

2º Toda ecuación mixta de 2º grado tiene igualmente dos raíces, y si la ecuación se ha traído á la forma $x^2+px+q=0$ conocida la 1ª raíz r, la segunda será igual á $-r-p$.

Por ejemplo, sea la ecuación

$$x^2-8x+15=0$$

en la que una de las raíces tiene por valor 5.
La otra raiz será $r'=-r-p=-5+8=3$

3º En toda ecuación de 2º grado de la forma $x^2+px+q=0$ cuyas raíces son r y r', el primer miembro es igual al producto de $(x-r)$ por $(x-r')$.

Por ejemplo, si las raíces de la ecuación $x^2-8x+15=0$ son 5 y 3, se tendrá $x^2-8x+15=(x-5)(x-3)$

4º En la ecuación $x^2+px+q=0$ la suma de las raíces $r+r'$ es igual á $-p$.

Por ejemplo, las raíces de la ecuación $x^2-8x+15=0$
siendo 5 y 3, se tiene $5+3=8$

5º En la misma ecuación $x^2+px+q=0$ el producto de las raíces $r\ r'$ es igual á q.

Por ejemplo, en la ecuación $x^2-8x+15=0$
el producto de sus raíces da $5\times3=15$

6º Conocidas las raíces de una ecuación puede reconstruirse.

Por ejemplo, si las raíces de una ecuación son los números 5 y 3, la ecuación de que proviene será:

$$x^2-(5+3)\ x+5\times3=0$$

7º En vez de resolver directamente una ecuación de segundo grado, se pueden obtener los valores de la incógnita buscando dos números cuya suma sea el coeficiente de x con signo cambiado y cuyo producto sea q, después de haber traido la ecuación á la forma general $x^2+px+q=0$.

315.—Condiciones para que el valor de x sea real ó imaginario, positivo ó negativo, exacto ó aproximado.—Una vez quitados los denominadores, pasadas todas las cantidades al primer miembro de la ecuación y efectuadas las demás operaciones hasta haber hecho que el cuadrado de la incógnita sea positivo y que no tenga coeficiente, la forma más general de una ecuación mixta de segundo grado hemos dicho que es:

$$x^2\pm px\pm q=0$$

En esta fórmula consideraremos *con cada uno de sus signos á q*, y en seguida á px para determinar qué condiciones de relación deben existir entre las cantidades conocidas para que el valor de x pueda ser *real ó imaginario; positivo ó negativo; exacto ó aproximado*. La fórmula general se descompone en las siguientes:

$$x^2 \pm px \pm q = 0 \begin{cases} x^2 \pm px - q = 0 \begin{cases} x^2 + px - q = 0 \ldots\ldots\ldots (1) \\ x^2 - px - q = 0 \ldots\ldots\ldots (2) \end{cases} \\ x^2 \pm px + q = 0 \begin{cases} x^2 + px + q = 0 \ldots\ldots\ldots (3) \\ x^2 - px + q = 0 \ldots\ldots\ldots (4) \end{cases} \end{cases}$$

Resultan, pues, cuatro casos diferentes que vamos á considerar sucesivamente.

I.—De la ecuación (1) $\quad x^2 + px - q = 0$

se obtienen para x los valores $\quad x = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

$$x = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

1° Los dos valores de x serán *reales* á causa de que los dos términos $\frac{p^2}{4}$ y q, que están dentro del radical, son positivos y que la raiz par de una cantidad positiva es *real*. El primer termino $\frac{p^2}{4}$ es positivo, porque el cuadrado de cualquier monomio, positivo ó negativo, siempre es positivo, y el segundo término q es positivo en el caso que consideramos, porque estaba con el signo — en el primer miembro de la ecuación.

Si el valor de x es *real* significa que el problema es posible.

2° Para determinar el *signo* de x, observaremos que su valor consta de dos términos: $\frac{p}{2}$ y $\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$ y que llevará el signo del término que sea mayor.

Ahora bien, como $\quad \frac{p}{2} = \sqrt{\frac{p^2}{4}}$

y $\quad \sqrt{\frac{p^2}{4}} < \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

se infiere que $\quad \frac{p}{2} < \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

Por tanto, siendo $\quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$

cuando tomemos el radical con el signo $+$ el valor de x será *positivo*, y cuando tomemos el radical con el signo $-$ el valor de x será *negativo.*

Debemos recordar que todo valor *positivo* contesta *directamente* el problema tal como ha sido establecido, y que todo valor *negativo* encontrado para la incógnita, en el caso de que el problema por su naturaleza no admita valores de esta clase, no contesta la cuestión sino *indirectamente;* debiendo modificarse el enunciado del problema cambiando de sentido los períodos en que éntre la incógnita. Además, el valor *negativo* de la incógnita sustituido en la ecuación, la convierte en identidad.

3º Como la expresión $\frac{p^2}{4}+q$, que está dentro del radical es un *binomio*, y algebráicamente no puede extraerse raíz cuadrada á un binomio, para que el valor de x pueda ser *exacto*, se necesita que el valor *numérico de* $\frac{p^2}{4}+q$ tenga raíz *exacta*, pues el término $\frac{p}{2}$ siempre representa un valor numérico exacto. Al contrario, si $\frac{p^2}{4}+q$ es un número que no tiene raíz cuadrada exacta, el valor de x será *aproximado.*

II.—Considerando la fórmula (2)

$$x^2-px-q=0$$

tendremos los valores:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

1.º Los dos valores de x serán *reales*, porque siendo q negativo en el primer miembro de la ecuación, la cantidad $\frac{p^2}{4}+q$ que está debajo del radical es positiva.

2.º Siendo $\frac{p}{2}<\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$, el signo de x depende del que se tome para el radical. En consecuencia, los problemas comprendidos en la fórmula que se discute conducen á dos resultados, de los que uno contesta directamente, y el otro indirectamente la cuestión.

3.º Los valores de x serán *exactos* cuando $\frac{p^2}{4}+q$ sea un cuadrado perfecto, y *aproximados* en el caso contrario.

III.—De la ecuación (3) $x^2+px+q=0$

se obtienen para x los valores: $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

1.° Para que el primer valor de x sea una cantidad *real*, lo que se necesita es: que la cantidad $\frac{p^2}{4}-q$, á la cual se ha de extraer la raíz cuadrada, sea positiva, (289) para lo cual se debe tener: $\frac{p^2}{4}-q>0$, ó $\frac{p^2}{4}>q$. En consecuencia, siempre que el cuadrado de la mitad del coeficiente del segundo término sea mayor que la suma de las cantidades conocidas independientes de x, que hemos representado por q, el valor de x será *real*. Y recíprocamente el valor de x será *imaginario* cuando los valores numéricos de los datos de la cuestión den $\frac{p^2}{4}<q$.

Si el valor de x es *real* será posible resolver el problema; por lo contrario, si es *imaginario* el problema será absurdo.

2.° Para determinar si el valor de x, que estamos considerando, será *positivo* ó *negativo*, observaremos que del valor de $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ tenemos que restar $\frac{p}{2}$, por lo que x llevará el signo de aquella de estas dos cantidades que sea la mayor. Para averiguar esto, observaremos que

$$\frac{p}{2}=\sqrt{\frac{p^2}{4}}$$

y que
$$\sqrt{\frac{p^2}{4}}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

luego
$$\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

En consecuencia, siendo $x=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

su valor será *negativo*, porque la cantidad mayor es negativa.

Ya hemos visto (268) que cuando la cuestión por su naturaleza no admite soluciones negativas y el valor de la incógnita es *negativo*, este no resuelve directamente el problema.

3.° Para que el valor de x sea *exacto*, se necesita que el número representado por $\frac{p^2}{4}-q$, y al cual se le ha de extraer la raíz, sea racional, esto es, que si es entero sea un cuadrado perfecto, y que si es quebrado lo sean sus dos términos (199) después de simplificado.

Al contrario, si $\frac{p^2}{4}-q$ *no es un cuadrado perfecto*, el valor de x solo podrá obtenerse *aproximado*, pudiendo llevarse la aproximación hasta el grado que se quiera.

Consideraremos el 2.º valor de x de la ecuación [3] $x^2+px+q=0$

$$x=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

1.º El valor de x será *real* si se tiene $\frac{p^2}{4}>q$.

2.º En este caso el valor de x será negativo, por ser negativos los dos términos que expresan su valor: $-\frac{p}{2}$ y $\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$

3.º El valor de x será *exacto* si $\frac{p^2}{4}-q$ es cuadrado perfecto, y *aproximado* en el caso contrario.

IV.—Considerando la fórmula (4) $x^2-px+q=0$, sacaremos para x los valores:

$$x=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

1.º Para que los valores de x sean *reales*, es necesario que la cantidad que está debajo del radical $\frac{p^2}{4}-q$ sea positiva, esto es, se necesita que $\frac{p^2}{4}>q$. En caso contrario, cuando $\frac{p^2}{4}<q$, los valores de x serán *imaginarios*.

2.º En este caso, cuando p es negativo en el primer miembro de la ecuación, y q positivo, los dos valores de x son *positivos*, porque $\frac{p}{2}>\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$. Así en los casos comprendidos en la fórmula $x^2-px+q=0$ que consideramos, satisfecha la condición de que $\frac{p^2}{4}>q$, los dos valores de x resuelven directamente el problema.

3.° Los valores de x serán *exactos* si el valor numérico de $\frac{p^2}{4}-q$ es un cuadrado perfecto, y *aproximados* en el caso contrario.

En *resumen*, considerando la fórmula general

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

1.° El valor de x será *real* cuando la cantidad que está debajo del radical sea *positiva*, lo cual tiene lugar cuando q lleva signo — en el primer miembro de la ecuación, y cuando siendo positivo: $q < \frac{p^2}{4}$.

El valor de x será *imaginario* cuando la cantidad que está debajo del radical es *negativa*, esto es, cuando además de ser positivo q en el primer miembro de la ecuación: $q > \frac{p^2}{4}$

2.° El signo de x dependerá del que tenga el término mayor de los dos de que se compone su valor; siendo $\frac{p}{2} > \sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$, y $\frac{p}{2} < \sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

3.° El valor de x será *exacto* cuando el valor numérico de la cantidad que está debajo del radical sea cuadrado perfecto; y será *aproximado* cuando dicha cantidad no lo sea.

Si el valor de x es *real*, el problema será posible; pero si es *imaginario*, el problema será absurdo.

Si el valor de x es *positivo*, contestará directamente al problema; pero si es *negativo*, y el problema no admite este género de valores, contestará indirectamente á él.

Si el valor de x es *exacto*, no diferirá nada del verdadero, faltándole ó sobrándole algo cuando sea *aproximado*.

De la ecuación general

$$x^2 \pm px \pm q = 0$$

se deducen cuatro principales en las que se observará lo siguiente para los valores de x:

$\left.\begin{matrix} x^2+px-q=0 \\ x^2-px-q=0 \end{matrix}\right\}$ siempre serán *reales*, *desiguales*, y de *signos contrarios*.

$\left.\begin{matrix} x^2+px+q=0 \\ \\ x^2-px+q=0 \end{matrix}\right\}$ si $q<\frac{p^2}{4}$ siempre serán *reales*, *desiguales* y con el *mismo signo;* siendo *negativos* en la primera ecuación y *positivos* en la segunda. Si $q>\frac{p^2}{4}$ serán *imaginarios*. Si $q=\frac{p^2}{4}$ los valores de x serán iguales.

Sean por ejemplo las siguientes ecuaciones:

1° $\begin{cases} x^2+3x-10=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{reales}\text{, porque 10 es negativo.} \\ x^2+3x+\ 2=0 & \text{Id. id. porque } (\frac{3}{2})^2>2 \\ x^2+3x+\ 3=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{imaginarios}\text{, porque 3 es positivo, y además, } (\frac{3}{2})^2<3 \end{cases}$

2° $\begin{cases} x^2+6x-27=0 & x \text{ será positivo ó negativo según sea el signo del radical.} \\ x^2+6x+\ 5=0 & \text{Los dos valores de } x \text{ serán negativos.} \\ x^2-6x+\ 5=0 & \text{Los dos valores de } x \text{ serán positivos.} \end{cases}$

3° $\begin{cases} x^2-\ 8x+15=0 & \text{Los valores de } x \text{ son } \textit{exactos} \text{ porque } \frac{8^2}{4}-15 \text{ tiene raíz exacta.} \\ x^2-10x+15=0 & \text{Son } \textit{aproximados}\text{, porque } \frac{10^2}{4}-15 \text{ no tiene raíz exacta} \end{cases}$

4° $x^2-6x+\ 9=0$ Son *iguales* porque $(\frac{6}{2})^2=9$

316.—Discusión de algunos casos particulares.—I.—Consideremos el caso comprendido en la fórmula:

$$x^2+px+q=0$$

de la que se saca
$$x=-\frac{p}{4}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

y como estos valores son ambos negativos nos indican que el problema es imposible tal como viene propuesto, y en efecto, es imposible que la suma de tres cantidades positivas x^2+px+q pueda ser cero.

Si se supone
$$\frac{p^2}{4}=q$$

el valor de x se convierte en
$$x=-\frac{p}{2}$$

valor que podemos obtener directamente de la ecuación

$$x^2+px+q=0$$

introduciendo la condición $\frac{p^2}{4}=q$. En efecto, la ecuación se cambia en

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=0$$

ó lo que es lo mismo (290)
$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=0$$

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)\times\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$$

Y como para que el producto de dos factores pueda ser cero es necesario que uno de los factores sea cero, y aquí los dos factores son iguales, para que la ecuación $\left(x+\frac{p}{2}\right)\times\left(x+\frac{p}{2}\right)=0$ pueda subsistir es indispensable que se tenga

$$x+\frac{p}{2}=0$$

lo que da

$$x=-\frac{p}{2}$$

Esto nos demuestra que *se obtiene el mismo resultado introduciendo una hipótesis en el valor definitivo de la incógnita, ó en la ecuación primitiva de donde se ha deducido, y que una ecuación de segundo grado no tiene más que una raíz cuando es* q *positivo en el primer miembro de la ecuación é igual á* $\frac{p^2}{4}$.

II.—Considerando el caso de la fórmula

$$x^2-px+q=0$$

los valores de x son:

$$x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

Para que estos sean *reales* es necesario tener $\frac{p^2}{4}>q$, y una vez satisfecha esta condición resulta que los dos valores de x serán positivos, esto es, ambos contestarán directamente la cuestión tal como viene propuesta.

Vamos á demostrar esto mismo deduciéndolo de la ecuación primitiva.

$$x^2-px+q=0$$

Cambiando los signos tendremos:

$$px-x^2=q$$

sacando x como factor común $\quad x(p-x)=q.$

Si se supone p dividido en dos partes de la que una es x, la otra será $p-x$, y en consecuencia se ve que la ecuación $x^2-px+q=0$ no es más que una transformación de la que sirve para plantear el problema: *dividir un número dado* p *en dos partes,* x *y* p−x *cuyo producto sea* q

$$x(p-x)=q$$

y como la resolución de la ecuación nos debe conducir á conocer tanto el valor de una parte como el de la otra, por esta razón tendremos dos valores para la incógnita que resuelven directamente la cuestión:

Si suponemos que x sea la parte mayor, $p-x$ será la menor, la suma de ambas es p, su diferencia la llamaremos d. Conforme á lo demostrado (266—V) tendremos: $\quad x=\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$

la parte menor: $p-x=\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$

multiplicando estas ecuaciones $x(p-x)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}$

y como $x(p-x)=q$

tendremos: $\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}=q$

luego $\frac{p^2}{4}>q$

condición que habiamos demostrado que era necesario satisfacer en el valor de $x=\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$ para que no fuera *imaginario*.

III.—Consideremos los casos comprendidos en la fórmula:

$$x^2+px-q=0$$

que da $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

Veamos qué sucede con los valores de x.

1° Cuando se tiene $q=0$

sustituido este valor en el de x se tiene

$$x=-\frac{p}{2}\pm\frac{p}{2}$$

esto es, $x=0$ $x=-p$

Estos valores de x podrán también deducirse de la ecuación. . . . $x^2+px-q=0$, haciendo en ella $q=0$; este supuesto la transforma en

$$x^2+px=0$$

sacando x como factor $x(x+p)=0$

y para que el producto de estos dos factores pueda ser cero, se necesita que uno de ellos sea igual á cero, esto es,

$$x=0$$

ó $x+p=0$ que da $x=-p$

que son los resultados obtenidos del valor de x.

2° Si se tiene $p=0$

el valor de $x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$

se cambia en $x=\pm\sqrt{q}$

resultado que puede obtenerse de la fórmula $x^2+px-q=0$ haciendo $p=0$, hipótesis que la transforma en

$$x^2-q=0$$

lo que da igualmente $$x=\pm\sqrt{q}$$

3º Si se tiene al mismo tiempo

$$p=0, \qquad q=0$$

el valor de $$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

se cambia en $$x=0$$

En efecto, introduciendo en la ecuación $x^2+px-q=0$ las condiciones $p=0$, $q=0$, se tiene

$$x^2=0$$

lo que da igualmente $$x=0$$

IV.—Discusión de la ecuación $ax^2+bx=c$

Vamos ahora á considerar la ecuación mixta de 2º grado en la forma

$$ax^2+bx=c$$

esto es, cuando después de haber quitado los denominadores y de haber sacado como factores comunes á x^2 y á x no se ha quitado el coeficiente del cuadrado de la incógnita, á fin de examinar la influencia que tendrán sobre los valores de x las hipótesis de hacer $a=0$, $b=0$ y $c=0$.

Para evitar el inconveniente que se tendría, suponiendo $a=0$, de hacer desaparecer el término en que entra el cuadrado de la incógnita, lo que transformaría la ecuación en otra de primer grado, naturalmente ocurre el artificio de cambiar el factor en un divisor que al quitar los denominadores de la ecuación transformada, dejará intacto el coeficiente a de x^2. Por tanto nos valdremos del artificio de hacer $x=\frac{1}{y}$ siendo y una nueva indeterminada cuyo valor depende del de x, á fin de hacer cambiar convenientemente la forma de la ecuación primitiva.

Sustituyendo por x su valor $\frac{1}{y}$ en la ecuación

$$ax^2+bx=c$$

esta se transforma en $$\frac{a}{y^2}+\frac{b}{y}=c$$

ó bien $$cy^2-by-a=0$$

Haciendo en ella: 1º $a=0$ esta ecuación se cambia en

$$cy^2-by=0$$

ó bien $$y[cy-b]=0$$ en la que debiendo ser nulo alguno de los factores para que su producto pueda ser cero, se tiene:

$$y=0 \text{ é } y=\frac{b}{c}$$

sustituyendo estos valores en el de $x=\frac{1}{y}$ tendremos

$$x=\tfrac{1}{0}=\infty, \quad \text{y} \quad x=\frac{c}{b}$$

2º Si además de $a=0$ se tiene $b=0$

los valores de x serán $\qquad x=\infty, \quad x=\frac{c}{0}=\infty$

3º Por último, si se tiene $a=0$, $b=0$ y $c=0$, el último valor de x será $\frac{0}{0}$, signo de la indeterminación, y en efecto, cualquier valor que se dé á x verificará la ecuación

$$ax^2+bx=c$$

cuando se tenga a, b y c iguales á cero.

*[317].—Propiedades de los trinomios de segundo grado.—Se llama trinomio de segundo grado toda expresión algebraica que puede ser de la forma

$$\pm my^2 \pm ny \pm p=0$$

siendo m, n y p cantidades conocidas con cualquier signo, representando y, *una variable*, es decir, una cantidad á la que se le puede dar valores arbitrarios de cualquiera magnitud. Para simplificar nuestros raciocinios discutiremos la expresión: $\quad my^2-ny+p=0$

dividiendo todos los términos por m y despejando á y resulta:

$$y=+\frac{n}{2m}\pm\frac{1}{2m}\sqrt{n^2-4mp}$$

Tres son los casos principales que pueden considerarse con respecto al valor de y:

1º Se puede tener $n^2-4mp>0$, ó *positivo,* en este caso las dos raíces serán *reales, desiguales y de signos cualesquiera.*

2º Puede tenerse $n^2-4mp=0$, en este caso las raíces serán *reales é iguales.*

3º Si, por último, $n^2-4mp<0$, ó *negativo,* los dos valores de y serán *imaginarios.*

Vamos á examinar algunas propiedades relativas á estos casos, haciendo notar que si en la ecuación

$$my^2-ny+p=0$$

sustituimos por y uno de sus valores obtendremos por resultado *cero*; pero si á la variable y se le da un valor arbitrario, se obtendrá un resultado distinto de *cero*, esto es, una cantidad positiva ó negativa.

Primero.—Siempre que un trinomio de segundo grado es tal que igualándolo á cero y resolviendo la ecuación, se obtienen dos raíces reales y desiguales, *cualquiera cantidad* [positiva ó negativa], *cuyo valor esté comprendido entre los de las dos raíces, sustituida en lugar de la variable y, en el trinomio, da necesariamente un resultado de signo contrario á aquel de que esté afectado* m, *coeficiente de* y^2; *pero cualquiera cantidad, cuyo valor no esté comprendido entre los de las dos raíces, sustituido en lugar de y da un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y^2.

Demostración.—Si se dividen por m todos los términos de la ecuación $my^2-ny+p=0$

quedará en la forma $y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}=0$

si llamamos y' é y'' las raices de esta última ecuación, conforme á lo demostrado en el número 314—III, tendremos que

$$y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}=[y-y'][y-y'']$$

multiplicando por m los dos miembros se tiene:

$$my^2-ny+p=m[y-y'][y-y'']\ldots\ldots(1)$$

ecuación que transforma el trinomio de 2º grado en el producto del coeficiente m por dos factores $(y-y')$ é $(y-y'')$; dependiendo naturalmente el signo del resultado del que tengan los factores.

Esto supuesto, sea a una cantidad cuyo valor esté comprendido entre y' é y'', esto es, que se tenga

$a>y'$ pero $a<y''$, lo que da $a-y'>0$, y $a-y''<0$

ó bien $a<y'$ pero $a>y''$, lo que da $a-y'<0$, y $a-y''>0$

sustituyendo $ma^2-na+p=m(a-y')(a-y'')\ldots\ldots(2)$

se ve, pues, que en cualquiera de los dos supuestos los factores $[a-y']$ $[a-y'']$ de m en la ecuación (2) tendrán signos contrarios, por lo que su producto será negativo, y el de esta cantidad negativa por m, esto es, $m[a-y'][a-y'']$ ó su valor ma^2-na+p resultará con signo contrario al que tenga el coeficiente m de y^2 en el trinomio $my^2-ny+p=0$

Si al contrario se supone

$a>y'$ y también $a>y''$ esto da $a-y'>0$ y $a-y''>0$

ó $a<y'$ y también $a<y''$ esto da $a-y'<0$ y $a-y''<0$

en cualquiera de los dos supuestos los dos factores $(a-y')$ y $(a-y'')$ tendrán el mismo signo, por lo que su producto será *positivo*, y en consecuencia el de esta cantidad positiva por m, esto es, $m(a-y')(a-y'')$ ó su valor ma^2-na+p tendrá el mismo signo que el coeficiente m, que es lo que debíamos demostrar.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuación $3y^2-48y+180=0$

resulta $y^2-16y+60=0$

de la que $y=8\pm\sqrt{64-60}$

las raíces serían tomando sucesivamente el signo $+$ y el signo $-$ del radical:

$$y'=10, \text{ é } y''=6$$

Dando, pues, á y un valor como 8 intermedio entre los de y' é y'', esto es, $y=8$ siendo $8<10$ y $8>6$, se tiene

$$3y^2-48y+180=3\times64-48\times8+180=-12$$

resultado de signo contrario á 3, coeficiente de y^2 en el trinomio.

Haciendo $y=5$ número menor que las dos raíces, supuesto que $5<10$ y $5<6$ se tiene:

$$3y^2-48y+180=3\times25-48\times5+180=+15$$

resultado del mismo signo que el coeficiente 3 de y^2.

Haciendo $y=12$ siendo $12>10$ y $12>6$ se tiene:

$$3y^2-48y+180=3\times144-48\times12+180=+36$$

resultado también del mismo signo que 3, coeficiente de y^2 en el trinomio de 2.º grado $3y^2-48y+180=0$.

Segundo.—Si las raíces son reales é iguales, *cualquiera cantidad diversa del valor que reduce el trinomio á cero sustituida en él; da un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y².

Demostración.—Supuesto que las dos raíces son iguales se tiene la relación $n^2-4mp=0$ de la que resulta $p=\frac{n^2}{4m}$

por lo que el trinomio $my^2-np+p=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=$

$$m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}\right)=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$$

esto es: $$my^2-ny+p=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2$$

Ahora bien, si en esta expresión sustituimos por y una cantidad cualquiera, a, mayor ó menor que $\frac{n}{2m}$, que es el único valor de la variable que reduce el 2.º miembro á cero, tendremos:

$$ma^2-na+p=m\left(a-\frac{n}{2m}\right)^2$$

Como cualquiera que sea el signo de $a-\frac{n}{2m}$, su cuadrado será siempre positivo, resulta que el producto del factor $\left(a-\frac{n}{2m}\right)^2$, esencialmente positivo, por m, producto equivalente al trinomio:

$$ma^2-na+p$$

dará un resultado del mismo signo que m, coeficiente de y^2 en el trinomio.

Podemos llegar á la misma conclusión tomando como base de nuestros raciocinios la fórmula (1)

$$my^2-ny+p=m(y-y')\ (y-y'')$$

En efecto, cuando las dos raíces son iguales, se tiene $y'=y''$, y la ecuación se transforma en:

$$my^2-ny+p=m\ (y-y')^2$$

No tomando para y el valor de la raiz y' caso en el que el trinomio será igual á cero, sino adoptando para y un valor cualquiera a, mayor ó menor que y, se tendrá:

$$ma^2-na+p=m\ (a-y')^2$$

y como cualquiera que sea el signo de $(a-y')$ su cuadrado es positivo, se infiere que su producto por m, que es equivalente al trinomio......... ma^2-na+p, dará un resultado del mismo signo que m.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuación $3y^2-24y+48=0$

resulta $y^2-8y+16=0$

de la que $y=4\pm\sqrt{4^2-16}=4$

las dos raíces son iguales $y=4$

haciendo $y=2$ número<4 se tiene $3y^2-24y+48=3.4-24.2+48=+12$

„ $y=10$ „ >4 „ $3y^2-24y+48=300-240+48=+108$

teniendo ambos resultados el mismo signo que el coeficiente 3 de y^2

Con motivo del caso, de que estamos ocupándonos, en el que las raíces del trinomio de 2.º grado son iguales, demostraremos un principio de uso frecuente en el análisis.

Siempre que un trinomio de segundo grado my^2+ny+p, es un cuadrado perfecto, existe entre las cantidades conocidas la relación $n^2-4mp=0$.

En efecto, si el trinomio my^2+ny+p es un cuadrado perfecto, tendrá que ser el cuadrado de un binomio compuesto de la suma ó diferencia de las raices de su primer y tercer término, esto es, tendremos:

$$my^2+ny+p=\left(y\sqrt{m}+\sqrt{p}\right)^2$$

desarrollando: $my^2+ny+p=my^2+2y\sqrt{mp}+p$

suprimiendo los términos iguales en los dos miembros:

$$ny=2y\sqrt{mp}$$

dividiendo por y, y elevando al cuadrado:

$$n^2=4mp$$

ó bien: $$n^2-4mp=0$$

que es lo que teníamos que demostrar.

Recíprocamente si se tiene entre los coeficientes la relación........ $n^2-4mp=0$ el trinomio será un cuadrado perfecto; porque de esta relación se deduce $p=\frac{n^2}{4m}$ luego

$$my^2+ny+p=my^2+ny+\frac{n^2}{4m}=\left(y\sqrt{m}+\frac{n}{2\sqrt{m}}\right)^2$$

Tercero.—En fin, si las dos raíces son imaginarias, *cualquiera cantidad real,* positiva ó negativa, *sustituida en lugar de* y, *dará un resultado del mismo signo que el coeficiente* m *de* y^2.

Porque supuesto que las dos raíces son imaginarias se tiene la relación:

$$n^2-4mp<0, \text{ ó } 4mp>n^2$$

dividiendo por $4m^2$ $\qquad \frac{p}{m}>\frac{n^2}{4m^2}$

esto es $\qquad \frac{p}{m}=\frac{n^2}{4m^2}+k^2$

representando k^2 una cantidad esencialmente positiva, de lo que resulta

$$my^2-ny+p=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{p}{m}\right)=m\left(y^2-\frac{n}{m}y+\frac{n^2}{4m^2}+k^2\right)$$

esto es, $\qquad my^2-ny+p=m\left(y-\frac{n}{2m}\right)^2+mk^2$

expresión que siempre tendrá el mismo signo que m, cualquiera que sea el valor que se le dé á y, por ser esencialmente positivos los factores de m, en los dos términos del segundo miembro de la ecuación.

Ejemplo.—Si tenemos la ecuación $\qquad 2y^2-20y+100=0$

resulta $\qquad y^2-10y+50=0$

de la que $\qquad y=5\pm\sqrt{25-50}$

cuyas raíces son imaginarias

haciendo

$y=+10$ se tiene $2y^2-20y+100=2.10^2-20.10+100=+100$

$y=-3$ $\qquad 2y^2-20y+100=2.-3^2-20.-3+100=+178$

teniendo ambos resultados el mismo signo que 2 coeficiente de y^2.

En resumen, resulta que cuando en el trinomio $my^2-ny+p=0$ se da á y un valor comprendido entre los de las raíces que verifican la ecuación, el resultado tendrá signo contrario al de m, y que en todos los demás casos el resultado será del mismo signo que m.

PROPORCIONES.

318.—PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES.—Tratándose en estas de las relaciones que ligan unas cantidades con otras, todas las propiedades y teoremas que dejamos demostrados en Aritmética, pueden demostrarse por los métodos del Algebra, pero sólo nos ocuparemos de los principales.

1.° Si se tiene la proporción aritmética $a \,.\, b : c \,.\, d$
fundándonos en la definición de la proporción aritmética
podremos formar la ecuación $a-b=c-d$
de la que trasladando b y d resulta $a+d=c+b$
luego *la suma de los extremos es igual á la de los medios.*

2.° Recíprocamente si se tiene: $a+d=c+b$
trasladando respectivamente d y b: $a-b=c-d$
se obtiene la proporción arítmética $a \,.\, b : c \,.\, d.$
luego, *siempre que la suma de dos cantidades sea igual á la de otras dos, con las cuatro cantidades podrá formarse una proporción aritmética.*

3.° Si se busca el cuarto término de una proporción aritmética.

$$a \,.\, b : c \,.\, x$$

fundándonos en que la suma de los extremos es igual á la de los medios
tendremos $a+x=b+c$
despejando $x=b+c-a$
lo que demuestra la regla dada (222) para hallar el cuarto término de una proporción aritmética.

4.° Si se tiene la proporción geométrica $a : b :: c : d$
fundándonos en la definición de proporción geométrica.

podemos establecer la ecuación $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

quitando los denominadores resulta: $ad=cb$

lo que demuestra *que el producto de los extremos es igual al de los medios.*

5.° Si se tienen cuatro cantidades cuyos productos dan

la ecuación $ad=cb$

dividiendo por db resulta: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

lo que da la proporción $a : b :: c : d$

que demuestra *que siempre que en cuatro cantidades el producto de dos de ellas sea igual al de las otras dos, con las cuatro cantidades podrá formarse una proporción geométrica.*

6.° Si se quiere hallar un medio geométrico entre dos cantidades a y b, debemos tener:

$$a : x :: x : b$$

fundándonos en que el producto de los extremos es igual al de los medios tendremos:

$$ab = x^2$$
$$x = \sqrt{ab}$$

resultado que demuestra la regla dada (223) para encontrar un medio geométrico.

7.° Sea la proporción $a : b :: c : d$

que da la ecuación $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

agregando ± 1 á los dos miembros $\dfrac{a}{b} \pm 1 = \dfrac{c}{d} \pm 1$

incorporando $\dfrac{a \pm b}{b} = \dfrac{c \pm d}{d}$

lo que da la proporción $a \pm b : b :: c \pm d : d$

resultado que demuestra las transformaciones que hemos llamado *componiendo y dividiendo*.

8.° Sean las razones iguales

$$a : b :: c : d :: e : f$$

tendremos: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} = \dfrac{e}{f} = q$

siendo todas las razones iguales á q tendremos $\dfrac{a}{b} = q$, $\dfrac{c}{d} = q$, etc.

de donde $a = bq \qquad c = dq, \qquad e = fq \ldots\ldots\ldots (1)$

sumando estas ecuaciones: $a + c + e = q(b + d + f)$

de donde $\dfrac{a + c + e}{b + d + f} = q = \dfrac{a}{b}$

luego $a + c + e : b + d + f :: a : b$

esto es, *la suma de los antecedentes es á la de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.*—Si en vez de sumar la serie de ecuaciones (1) las restamos, demostraremos que la *diferencia de los antecedentes es á la de los consecuentes como un antecedente es á su consecuente.*

9.° Sean las proporciones: $a : b :: c : d$
$e : f :: g : h$

que dan las ecuaciones $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$

$$\frac{e}{f}=\frac{g}{h}$$

multiplicándolas se tiene:

$$\frac{ae}{bf}=\frac{cg}{dh}$$

lo que da la proporción $ae : bf :: cg : dh$

resultado que demuestra *que pueden multiplicarse ordenadamente dos proporciones.*

10.° Sea la proporción $a : b :: c : d$

que da la ecuación

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

elevando á la potencia m

$$\frac{a^m}{b^m}=\frac{c^m}{d^m}$$

extrayendo la raíz

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}$$

estas ecuaciones dan las proporciones:

$$a^m : b^m :: c^m : d^m \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} :: \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$$

luego *se puede elevar, ó se les puede extraer la misma raíz á los cuatro términos de una proporción geométrica, subsistiendo ésta.*

REGLA DE TRES DIRECTA.—PROBLEMA.—Si 20 varas de una tapia han costado \$350; otras 28 varas ¿cuánto costarán?

Haciendo 20 varas$=c$
28 varas $=c'$
\$350$=h$

representando por p el precio de cada vara de tapia, y por x el costo que buscamos, tendremos:

$$c \times p=h$$
$$c' \times p=x$$

dividiendo ordenadamente estas ecuaciones,

$$\frac{c}{c'}=\frac{h}{x}\text{.......................(D)}$$

Esta ecuación, en la que queda planteado el problema de regla de tres directa, puesta en forma de proporción, da:

$$c : c' :: h : x$$

si de la misma ecuación despejamos á x, tendremos:

$$x=h\times\frac{c'}{c}$$

proporción y fórmula que respectivamente fundan las reglas dadas en Aritmética. (230).

REGLA DE TRES INVERSA.—Problema.—Si 30 albañiles han hecho una pared en 18 días; 40 albañiles ¿en cuántos días harán otra pared igual?

Haciendo 30 albañiles$=c$
40 albañiles$=c'$
18 días $=h$

representando por m la fracción de metro cúbico de pared que hace un albañil al día, por M el número de metros cúbicos de la pared, y por x el de los días que se busca, tendremos:

$$c\times m\times h=M$$
$$c'\times m\times x=M$$

igualando estos valores y dividiendo por m, se tiene:

$$c\times h=c'x \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (I)$$

esta ecuación, en la que queda planteado el problema de regla de tres *inversa*, puesta en forma de proporción da:

$$c' : c :: h : x$$

si de la misma ecuación despejamos á x tendremos:

$$x=h\times\frac{c}{c'}$$

proporción y fórmula que respectivamente comprueban las reglas que dimos en Aritmética. (230)

PROGRESIONES.

319.—Progresiones.—*Se llama progresión una serie ó continuación de términos en proporción continua.* La progresión puede ser aritmética ó geométrica. Se dice que es aritmética cuando cada término le lleva al que le precede ó sigue una cantidad constante, que se llama *razón.* Se dice que la progresión es geométrica cuando cada término cabe en el que le precede ó sigue el mismo número de veces.

Una progresión puede ser creciente ó decreciente. Se dice que es creciente cuando los términos van aumentando, y decreciente cuando van disminuyendo.

320.—Progresión aritmética.—Def.—*Se llama progresión aritmética, una série de términos en la que cada uno le lleva al que le precede ó sigue* *una cantidad constante que se llama razón.* A la progresión *aritmética* atendiendo á su formación, se le llama también progresión por *diferencia*, y se indica generalmente como sigue:

$$\div\ 2.\ 5.\ 8.\ 11.\ 14.\ 17.$$

Se lee: 2 es á 5 como 5 es á 8, como 8 es á 11, como 11 es á 14 como 14 es á 17. Se ve que la progresión es una serie de proporciones continuas, en la que todos los términos son antecedentes menos el último, y todos los términos son consecuentes menos el primero.

En la progresión aritmética creciente, cada término es igual al que le precede más la razón, ó al que le sigue menos la razón; y en la decreciente, cada término es igual al que le antecede menos la razón, ó al que le sigue más la razón.

Siendo muy fácil deducir las propiedades de la progresión decreciente cuando se conocen las de la creciente, nos ocuparemos particularmente de ésta.

Teorema.—*En la progresión aritmética, un término cualquiera es igual al primero, más tantas veces la razón como términos hay antes de él.*

Sea la progresión $\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .\ e\ \ldots\ldots$

cuya razón es r

fundándose en la definición de la progresión, tendremos

el segundo término $b=a+r$

y como $c=b+r$ poniendo por b su valor,

el tercero $c=a+2r$

y como $d=c+r$ poniendo por c su valor,

el cuarto término $d=a+3r$

y como $e=d+r$ sustituyendo por d su valor,

el quinto término $e=a+4r$

luego atendiendo á que los términos de una progresión aritmética se forman agregando al primero sucesivamente la razón, se deduce que un término cualquiera es igual al primero más tantas veces la razón como términos hay antes de él.

En general, si se representa por l el último término de la progresión aritmética creciente

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ldots\ldots h\ .\ i\ .\ j\ .\ l$$

en la que la razón es r, y n es el número de sus términos, tendremos:

$$l=a+(n-1)\ r\ \ .\ \ .\ \ .\ \ (1)$$

fórmula que nos servirá para determinar un término de cierto orden en una progresión, sin necesidad de formar los intermedios, ó para determinar una de las cuatro cantidades a, r, n ó l, cuando se conocen las otras tres.

Si la progresión es decreciente, basta considerar que la razón r es negativa, y la fórmula (1) se transforma en

$$l=a-(n-1)r$$

TEOREMA.—*En toda progresión aritmética la suma de los extremos es igual á la de dos términos cualesquiera equidistantes de los extremos.*

Sea la progresión creciente $\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .d\ldots\ldots h\ .\ i\ .\ j\ .\ l.$

Demostraremos este principio de dos maneras:

1º Si consideramos los extremos a y l y los términos inmediatos á estos extremos b y j, notaremos que con estas cuatro cantidades podemos formar la proporción aritmética

$$a\ .\ b : j\ .\ l$$

fundándonos en que la razón entre a y b es r, lo mismo que entre j y l; y como en la proporción aritmética, la suma de los extremos es igual á la de los medios, el principio que venimos demostrando será cierto con los términos equidistantes b y j que hemos considerado.

Ahora, si consideramos los términos equidistantes c é i, con ellos y los extremos podremos formar una proporción

$$a\ .\ c : i\ .\ l$$

en la que la razón es $2r$, y en virtud de esta proporción inferimos que la suma de los extremos es igual á la de los términos equidistantes c é i.

Otro tanto deduciríamos de los términos d y h, entre los que la razón es $3r$, y de otros cualesquiera equidistantes.

2º Hemos visto que en una progresión aritmética creciente, un término cualquiera es igual al primero *más* tantas veces la razón como términos hay antes de él, y comparando con el último término el penúltimo, el antepenúltimo y todos los anteriores, es fácil deducir que un término cualquiera es igual al último *menos* tantas veces la razón como términos hay después de él. Por tanto en la siguiente progresión

$$\div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ldots\ldots h\ .\ i\ .\ j\ .\ l$$

tendremos

$$\left.\begin{array}{l} b=a+r \\ j=l-r \end{array}\right\} \text{ luego } b+j=a+l$$

$$\left.\begin{array}{l} c=a+2r \\ i=l-2r \end{array}\right\} \text{ luego } c+i=a+l$$

$$\left.\begin{array}{l} d=a+3r \\ h=l-3r \end{array}\right\} \text{ luego } d+h=a+l$$

y en general si representamos por x un término que tiene p términos antes de él, y por y otro término equidistante del último que tiene p términos después de él, tendremos:

$$x = a + pr$$
$$y = l - pr$$

sumando estos valores $\quad x + y = a + l$

luego, la suma de los extremos de una progresión aritmética es igual á la de dos términos cualesquiera equidistantes á ellos.

TEOREMA.—*La suma de todos los términos de la progresión aritmética, es igual á la suma del primero y el último, multiplicada por la mitad del número de términos*

Sea la progresión $\quad \div\ a\ .\ b\ .\ c\ .\ d\ .....\ h\ .\ i\ .\ j\ .\ l$

escribiéndola en sentido inverso $\quad \div\ l\ .\ j\ .\ i\ .\ h\ .....\ d\ .\ c\ .\ b\ .\ a$

Sumando ordenadamente estas dos progresiones término á término, es claro que obtendremos el valor de la doble suma de la primera progresión, supuesto que hemos repetido sus términos. Llamando s la suma, tendremos:

$$2s = (a + l) + (b + j) + (c + i) + \ldots\ldots (i + c) + (j + b) + (l + a)$$

y como conforme al teorema anterior, todos los sumandos del segundo miembro de la ecuación, que hemos anotado dentro de paréntesis son iguales, y hay tantos sumandos como número de términos tiene la progresión, tendremos:

$$2s = (a + l)n$$

de donde
$$s = \frac{(a + l)}{2} n \ldots\ldots\ldots (2)$$

fórmula que nos da el valor de la suma de los n términos de una progresión aritmética sea creciente ó decreciente, supuesto que es independiente de r y en consecuencia del signo de la razón.

FÓRMULAS GENERALES DE LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.—Cinco son las cantidades que entran como datos ó como incógnitas en los problemas relativos á la progresión aritmética: a, l, n, r y s, y hasta ahora hemos demostrado dos fórmulas fundamentales de las que pueden deducirse otras tres.

No contiene á s	$l = a + (n - 1)r \ldots\ldots\ldots [1]$
No contiene á r	$s = \frac{(a + l)}{2} n \ldots\ldots\ldots\ldots [2]$
Resulta eliminando á a	$2s = 2ln - rn(n - 1) \ldots . [3]$
" " á l	$2s = 2an + rn(n - 1) \ldots . [4]$
" " á n	$2rs = l^2 - a^2 + ar + lr \ldots . [5]$

Estas cinco fórmulas servirán para resolver cualquier problema relativo á la progresión aritmética. Aplicaremos la (1) cuando la suma no entra como dato ni como incógnita en el problema propuesto; la (2) cuando la razón no entra como dato ni como incógnita; la (3) cuando no se conoce ni se busca á a; la (4) cuando no se conoce ni se pide á l, y la (5) cuando no forma parte del enunciado del problema el número de términos.

321.—PROBLEMAS DE LA PROGRESIÓN ARITMÉTICA.—Los más comunes son tres: encontrar un término de determinado órden sin calcular los que le preceden: interpolar varios medios aritméticos entre dos números dados, y calcular la suma de los términos de una progresión.

I.—Se quiere determinar el 10º término de la progresión

$$\div\ 2\ .\ 5\ .\ 8 \ldots\ldots$$

para esto haremos uso de la fórmula [1]

$$l=a+(n-1)r$$

haciendo $a=2$. $r=3$ y $n=10$, sustituyendo resulta:

$$l=2+9\times3=29$$

En efecto, $\div$ 2. 5. 8. 11. 14. 17. 20. 23. 26. 29.

II.—Se quieren interpolar cinco medios aritméticos entre los números 3 y 27, esto es, se trata de formar una progresión en la que 3 y 27 sean los extremos debiendo haber entre ellos cinco términos.

Para esto haremos uso de la fórmula [1]

$$l=a+(n-1)r$$

en la cual conocemos el valor de $l=27$, de $a=3$ y el de n igual á los dos números dados, más cinco que se van á interpolar, esto es, $n=7$ En consecuencia, determinando el valor de r, podremos formar nuestra progresión.

Despejando r tendremos $r=\frac{l-a}{n-1}$.

Sustituyendo tendremos $r=\frac{27-3}{7-1}=4$

Una vez conocida la razón 4 es fácil formar los cinco medios buscados de la progresión

$$\div\ 3.\ 7.\ 11.\ 15.\ 19.\ 23.\ 27.$$

III.—Se quiere determinar la suma de los ocho primeros términos de la progresión

$$\div\ 4.\ 9.\ 14.\ 19.\ 24.\ 29.\ 34.\ 39.$$

para esto haremos uso de la fórmula [2]

$$s=\frac{(a+l)\,n}{2}$$

Sustituyendo se tiene $s=\frac{(4+39)8}{2}=172$

IV.—Sea como ejemplo determinar el primer término de una progresión cuya razón es 4, el número de términos es 7, y la suma de ellos 105.

No formando parte del problema el último término, haremos uso de la ecuación [4]

$$2s=2an+rn\,(n-1)$$

Despejando $$a=\frac{2s-rn\,(n-1)}{2n}$$

Sustituyendo los valores $$a=\frac{2\times105-4\times7\times6}{2\times7}=3$$

322.—Progresión geométrica.—Def.—*Se llama progresión geométrica una serie ó continuación de términos en la que cada uno contiene al que le precede ó sigue el mismo número de veces.* A la progresión *geométrica* se le llama igualmente *por cociente.*

La razón de la progresión geométrica es el cociente que resulta de dividir un término por el que le antecede. En la progresión geométrica creciente la razón es mayor que la unidad, y en la decreciente es un quebrado.

La progresión geométrica se indica generalmente como sigue:

$$\div\!\!\div\ 3 : 6 : 12 : 24 : 48$$

y se lee 3 es á 6, como 6 es á 12, como 12 es á 24, como 24 es á 48.

Se ve, pues, que la progresión es una serie de proporciones contínuas en la que todos los términos son antecedentes menos el último, y todos son consecuentes menos el primero.

De la definición de progresión geométrica resulta que cualquier término es igual al que le antecede multiplicado por la razón.

Teorema.—*Un término de una progresión geométrica es igual al primero multiplicado por la razón elevada á una potencia, cuyo grado indica el número de términos que hay antes de él.*

Sea la progresión geométrica

$$\div\!\!\div\, a : b : c : d : e : \ldots\ldots\, j : l$$

cuya razón es q. Conforme á la definición de la progresión tendremos;

que el segundo término	$b=aq$	
y como	$c=bq,$	sustituyendo por b su valor
el tercer término	$c=aq^2$	
y como	$d=cq,$	sustituyendo por c su valor
el cuarto término	$d=aq^3$	
y como	$e=dq,$	sustituyendo por d su valor
el quinto término	$e=aq^4$	

y en general si representamos por l el último término de una progresión que consta de n términos se tendrá:

$$l = aq^{n-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

fórmula que nos sirve para determinar un término de una progresión geométrica, cuando se conoce el primero, la razón y el orden del término que se busca, esto es, el número de términos de la progresión. Igualmente puede servir para determinar la razón q é interpolar cierto número de medios geométricos entre dos números dados.

Teorema.—*La suma de todos los términos de una progresión geométrica, es igual al producto del último término por la razón, menos el primero, dividida esta diferencia por la razón después de haberle disminuido la unidad.*

Sea la progresión geométrica

$$\div\, a : b : c : d \ldots\ldots\ldots\ldots i : j : l$$

llamando s la suma tendremos

$$s = a + b + c + d + \ldots\ldots\ldots i + j + l$$

llamando q la razón y sustituyendo el valor de todos los términos menos el del primero, resulta

$$s = a + aq + bq + cq + \ldots\ldots\ldots\ldots iq + jq$$

sacando q como factor común

$$s = a + (a + b + c + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + i + j)q$$

y observando que el factor que multiplica q es igual á la suma de todos los términos de la progresión, menos el último, esto es, $s-l$, tendremos

$$s = a + (s - l)q$$

ejecutando las operaciones $s = a + sq - lq$

pasando s al segundo miembro y trasladando lq y a

$$lq - a = sq - s$$

y despejando $$s = \frac{lq-a}{q-1} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

fórmula que es la expresión algebraica del teorema que debíamos demostrar.

Esta fórmula nos servirá para determinar la suma de una progresión ó alguna de las cantidades a, l, q, cuando se conozca la suma y las otras dos.

Si en la fórmula $s = \frac{lq-a}{q-1}$ sustituimos el valor de $l = aq^{n-1}$ se convertirá en

$$s=\frac{aq^n-a}{q-1}=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

expresión que servirá para determinar el valor de la suma en función del primer término de la razón y del número de términos de la progresión.

Si en esta expresión:

$$s=\frac{a(q^n-1)}{q-1}$$

introducimos la condición de que la razón $q=1$ se convertirá en:

$$s=\frac{0}{0}$$

y aparecería á primera vista que estando expresado s por el símbolo de la indeterminación podría tener cualquier valor. Esto procede de la existencia de un factor común al numerador y al denominador que en virtud de la hipótesis de $q=1$ se ha hecho nulo, y como lo hemos explicado (269—5.º) es preciso hacer desaparecer ese factor común antes de introducir la condición que lo hace igual á cero. En efecto, como

$$\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots\ldots\ldots q+1$$

tendremos: $s=a\,(q^{n-1}+q^{n-2}+q^{n-3}+\ldots\ldots\ldots\ldots q+1)$
haciendo ahora $q=1$; $s=a+a+a+\quad\ldots\ldots\ldots\ldots a$
ó $s=na$

resultado verdadero, supuesto que cuando la razón es la unidad, la progresión se convierte en

$$\div\, a:a:a:\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:a$$

cuya suma es na.

Si consideramos una progresión decreciente al infinito, tendremos que $q<1$ y como los términos sucesivamente van decreciendo, cuando su número sea infinito el valor del último llegará á ser $l=0$.

Introduciendo estas dos condiciones en la expresión:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}$$

se convertirá en:

$$s=\frac{-a}{q-1}$$

ó multiplicando por —1 los dos términos del quebrado, se obtiene:

$$s=\frac{a}{1-q}$$

fórmula que da la suma de una progresión decreciente al infinito, de la cual suele hacerse uso en el análisis, y sirve para convertir en quebrado una fracción periódica simple, cuyo valor es la suma de una progresión geométrica decreciente al infinito.

FÓRMULAS GENERALES DE LA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.—En las dos fórmulas fundamentales que hemos demostrado, entran cinco cantidades, a, l, n, q, s, y eliminando entre estas dos fórmulas sucesivamente una cantidad, pueden deducirse otras tres.

No contiene á s	$l=aq^{n-1}$..................(1)
No contiene á n	$s=\dfrac{lq-a}{q-1}$..................(2)
Resulta eliminando á a	$lq^n-l+sq^{n-1}-sq^n=0$......(3)
Idem á l	$aq^n-a+s-sq=0$..........(4)
Idem á q	$l(s-l)^{n-1}-a(s-a)^{n-1}=0$...(5)

De estas cinco fórmulas se hace uso para resolver cualquier problema relativo á la progresión geométrica, teniendo cuidado de servirse de aquella en la que esté eliminada la cantidad que no entra como dato ni como incógnita en el problema.

Cuando la incógnita es n y esta cantidad entra como exponente, es preciso resolver la ecuación por logaritmos, como lo explicaremos en el número 340.

323.—PROBLEMAS DE LA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA.—Los problemas más frecuentes son tres: determinar un término sin calcular los anteriores; interpolar varios medios geométricos entre dos números dados, y calcular la suma de los términos de la progresión.

I.—Se quiere determinar el 5.º término de la progresión cuyos dos primeros términos son: ÷ 2 : 6.

Haremos uso de la fórmula (1):

$$l=aq^{n-1}$$

Sustituyendo: $a=2$, $q=3$, y $n=5$

$$l=2\times3^4=2\times81=162$$

II.—Supongamos que se quieren interpolar *tres* medios geométricos entre los números 2 y 162.

Como aquí, de lo que se trata es de determinar la razón, y no forma parte del problema la suma, haremos uso de la fórmula (1)

$$l=aq^{n-1}$$

despejando á $\qquad q=\sqrt[n-1]{\dfrac{l}{a}}$

considerando que siendo dos los términos conocidos y 3 los que van a interpolarse, $n=5$, sustituyendo se tendrá:

$$q=\sqrt[4]{\frac{162}{2}}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=3$$

conocida la razón 3 se formará la progresión:

$$\div\, 2 : 6 : 18 : 54 : 162$$

Hay casos en que este problema no puede resolverse sino por medio de logaritmos. Tal es, por ejemplo, cuando hay que extraer raíz 5.ª ó 7.ª, operación que, además de ser complicada, no hemos enseñado á ejecutar hasta ahora, pero en el próximo capitulo lo haremos, sirviéndonos de los logaritmos.

III. Sea por averiguar la suma de los términos de la progresión

$$\div\, 2 : 10 : 50 : 250 : 1250 : 6250$$

nos serviremos de la fórmula:

$$s=\frac{lq-a}{q-1}$$

sustituyendo: $s=\frac{6250\times 5-2}{5-1}=7812.$

LOGARITMOS.

324.—Teoría de los logaritmos.—Si tomamos una cantidad *constante*, como 10, base de nuestro sistema de numeración, y la elevamos á diversas potencias, obtendremos:

$$1=10^0$$
$$10=10^1$$
$$100=10^2$$
$$1000=10^3$$

y en este caso los diferentes exponentes de la cantidad fija 10 son los *logaritmos* de los números que respectivamente se han producido. En nuestro ejemplo 0 es el logaritmo del número 1, 1 es el logaritmo de 10, 2 es el logaritmo de 100 y 3 es el logaritmo de 1000.

Generalizando estos principios consideraremos la ecuación:

$$y=a^x \text{ . . . .}(1)$$

en la que y representa un número cuyo valor depende del que se dé al exponente variable x; siendo a una cantidad *constante*, que se llama *base* y que satisface las condiciones de ser positiva y diferente de la unidad; y vamos á demostrar que dando á x valores convenientes en la ecuación $y=a^x$ se pueden obtener para y todos los valores numéricos positivos que se quiera.

1.° Si se concibe que sea $a>1$, haciendo en la ecuación $y=a^x$ primero $x=0$, y en seguida $x=1$, $x=2$, etc.

para $x=0, 1, 2, 3 \ldots\ldots$ logaritmos positivos.
se tendrá $y=1, a, a^2, a^3 \ldots\ldots$ números mayores que 1

esto es, se obtendrán números mayores que la unidad sucesivamente crecientes hasta el infinito á medida que se aumenten los valores del exponente x; pudiendo también obtenerse los números comprendidos entre 1 y a, dando á x valores intermedios entre 0 y 1; los números comprendidos entre a y a^2 dando á x valores intermedios entre 1 y 2; y los números comprendidos entre a^2 y a^3 dando á x valores intermedios entre 2 y 3. Si se dan á x valores negativos, se convertirá la ecuación (1) en:

$$y=a^{-x}, \quad y=\frac{1}{a^x}$$

para $x=0, -1, -2, -3 \ldots\ldots$ logaritmos negativos
se obtendrá: $y=1, \quad \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \frac{1}{a^3} \cdots\cdot$ números menores que 1

esto es, dando á x valores negativos se obtendrán para y valores menores que 1 sucesivamente decrecientes hasta llegar á ser 0, cuando $x=-\infty$. Si se dan valores negativos á x intermedios entre $0, -1, -2$, etc., se obtendrán los números comprendidos entre $1, \frac{1}{a}$, y $\frac{1}{a^2}$ etc,

2° Si se supone $a<1$, la base será un quebrado y se tendrá $a=\frac{1}{b}$ siendo $b>1$. En este caso, la ecuación general (1) se cambia en

$$y=\frac{1}{b^x}$$

y para $x=0, =1, =2,$ etc., logaritmos positivos
se tendrá $y=1, =\frac{1}{b}, =\frac{1}{b^2}$, etc., números menores que 1,

esto es, á medida que se aumentan los valores de x se obtendrán números sucesivamente decrecientes, hasta tener $y=0$ cuando $x=\infty$; y dando á x los valores intermedios convenientes, podrán obtenerse para y todos los números comprendidos entre 1 y 0. Si al contrario, damos á x valores negativos en la ecuación $\frac{1}{b^x}$, considerando que $\frac{1}{b^{-x}}=b^x$

para $\quad x=0, =-1, =-2$, etc., logaritmos negativos
se tendrá $\quad y=1, = \ b, = \ b^2$, etc., números mayores que 1,
esto es, se obtendrán valores mayores que la unidad sucesivamente crecientes á medida que aumenta el valor numérico de $-x$, pudiendo obtenerse todos los valores intermedios entre 1 y b, entre b y b^2, etc. dando á x valores intermedios entre 0 y -1, entre -1 y -2, etc.

3º Como tanto cuando $a>1$, como cuando $a<1$, pasando x por toda la serie de valores posibles, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, los valores que resultan para y todos son *positivos* desde 0 hasta $+\infty$; se infiere que *los números negativos no tienen logaritmos reales.*

Más adelante (337—IV) explicaremos el artificio que se emplea para ejecutar por logaritmos operaciones con cantidades negativas.

4º Si se supone $a=1$, cualquiera que sea el valor de x en la ecuación $y=a^x$ se obtiene $y=1$, y por esta razón la base a de los logaritmos debe ser diferente de la unidad. Otro tanto sucedería si la base fuera cero. Por último, es conveniente que la base sea *positiva*, porque como hemos visto que las potencias pares de una cantidad negativa son números positivos, y las impares son negativos, la adopción de una base negativa haría complicado el uso de los logaritmos con los cuales se representan todos los números por las potencias á que es necesario elevar la *base.*

Así, pues, con tal de que a no sea cero ni la unidad, *habrá siempre en la ecuacion* $y=a^x$, *un valor de* x *que hará* a^x *igual á un número dado* y.

El uso continuo y las útiles propiedades de la ecuación $y=a^x$ ha hecho dar un nombre especial á cada una de las cantidades que la forman; *llamándose al exponente* x *logaritmo del número* y, *y la cantidad arbitraria pero invariable* a, *base.*

Lo que antecede, hará comprender la siguiente:

Definición.—*Logaritmos son los números que indican las diversas potencias á que se ha de elevar una cantidad constante para producir números dados.*

Si se supone una tabla en la que consten unos debajo de otros todos los números naturales 1, 2, 3, 4, etc., y al lado los números que indican las diferentes potencias á que se ha de elevar la base escogida ($a=10$, por ejemplo), para producir los números dados 1, 2, 3, 4, etc., se tendrá una idea de las tablas de logaritmos comunes.

Cuando se escribe $x=Log\ y$ para indicar que x es el logaritmo del número y, la base a está sobreentendida, porque una vez escogida tiene que permanecer invariable; pero si se cambia, se debe indicar la nueva base, que constituye otro sistema de logaritmos.

Fijada la base de un sistema de logaritmos, cada número no tiene más que un logaritmo, porque solamente elevada la base á determinada potencia producirá el número dado. Por ejemplo, adoptada la base 10, siendo el número $1000=10^3$, 3 será el único logaritmo de 1000 en el sistema cuya base es 10. Al contrario, cambiando las bases, un mismo número puede tener diversos logaritmos, así como un mismo logaritmo puede corresponder á varios números; pero lo repetimos, en *diversos sistemas.*

De todo lo que dejamos expuesto pueden deducirse las siguientes consecuencias:

1ª *La base de los logaritmos no puede ser cero ni la unidad y es conveniente que no sea negativa.*

2ª *En todos los sistemas de logaritmos el de la unidad es cero,* (256) *y el de la base es* 1.

3ª *Cuando la base* a *es mayor que* 1, *los logaritmos de los números mayores que la unidad, son positivos, y los de las fracciones son negativos. Cuando* $a<1$, *tiene lugar lo contrario.*

4ª *Los números negativos no tiénen logaritmos reales.*

5ª *Fijado el valor de la base se constituirá un sistema de logaritmos en el que cada número no tiene más que un logaritmo, y cada logaritmo no corresponde más que á un sólo número.*

6º La formación de una tabla de logaritmos consiste en determinar los valores de x que en la ecuación $y=a^x$ dan $y=1$, $=2$, $=3$, $=4$, etc.

Teor.—*Los logaritmos son números puestos en progresión aritmética, correspondientes término á término á otros números puestos en progresión geométrica, de modo que el término que es cero en la progresión aritmética corresponde al que es la unidad en la progresión geométrica.*

Si en la ecuación general $y=a^x$ damos á x los valores 0, l, $2l$, $3l$, etc., puestos en progresión aritmética y calculamos los valores correspondientes de y tendremos, 1, a^l, a^{2l}, a^{3l}, etc., y si $a^l=n$,

para $x=0 \ . \ l \ . \ 2l \ . \ 3l$..........logaritmos

resultará $y=1 : n : n : n^3$..........números

resultados que demuestran la verdad del teorema.

Si 10 es la base del sistema, la ecuación fundamental

$$y=a^x$$

se transforma en $$y=10^x$$

y las series correspondientes de los logaritmos y de los números en este caso serán:

para $x=-3. \quad -2. \quad -1. \quad 0. \quad 1. \quad 2. \quad 3$.........logaritmos

$y=\frac{1}{1000}: \quad \frac{1}{100}: \quad \frac{1}{10}: \quad 1: \quad 10: \quad 100: \quad 1000$......números

resultando los logaritmos en progresión aritmética, cuya razón es 1 y los números en progresión geométrica, cuya razón es 10, correspondiendo el logaritmo cero al número 1.

325.—Propiedades y uso de los logaritmos en los cálculos.—Vamos á demostrar los siguientes principios:

1º *El logaritmo del producto, es igual á la suma de los logaritmos de sus factores.*

Sean dos números y é y' cuyos logaritmos son respectivamente x y x'; llamando a la base del sistema tendremos:

$y=a^x$ lo que significa que (324) $x=\log. y$

$y'=a^{x'}$ lo que significa que $x'=\log. y'$

multiplicando ordenadamente los números y, y' y sus valores se tiene

$$y\,y'=a^{x+x'}$$

y fundándonos en que el logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que se ha de elevar la base a para producir el número dado, tendremos que

$$\log. y\,y'=x+x'$$

sustituyendo por x y x' sus valores, resulta que

$$\log. y\,y'=\log. y+\log. y'$$

que es lo que se debía demostrar.

2º *El logaritmo del cociente de dos cantidades, es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.*

Sea $y=a^x$ lo que significa que (324) $x=\log. y$

$y'=a^{x'}$ lo que significa que $x'=\log. y'$

dividiendo ordenadamente los números y sus valores, se tiene:

$$\frac{y}{y'}=a^{x-x'}$$

y fundándonos en que el logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que se ha de elevar la base a para producir el número dado tendremos que

$$\log. \frac{y}{y'}=x-x'$$

sustituyendo por x y x' sus valores, resulta que

$$\log. \frac{y}{y'}=\log. y-\log. y'$$

que es lo que se debía demostrar

3º *El logaritmo de una cantidad elevada á una potencia, es igual al logaritmo de la cantidad multiplicado por el exponente de la potencia.*

Sea $y=a^x$ lo que significa que (324) $x=\log. y$

Elevando á la n^{ma} potencia $y^n=a^{n.x}$

y fundándonos en que logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que se ha de elevar la base a para producir el número dado, tendremos que

$$\log: y^n = n.\ x$$

sustituyendo por x su valor resulta que

$$\log.\ y^n = n \times \log.\ y$$

que es lo que se debía demostrar

4º *El logaritmo de la raíz de una cantidad, es igual al logàritmo de la cantidad dividido por el índice del radical:*

Sea $y = a^x$ lo que significa que (324) $x = \log.\ y$

extrayendo la raíz m al número y, y á su valor a^x se tiene:

$$\sqrt[m]{y} = a^{\frac{x}{m}}$$

y fundándonos en que el logaritmo de un número es el exponente de la potencia á que se ha de elevar la base a para producir el número dado, tendremos que

$$\log.\sqrt[m]{y} = \frac{x}{m}$$

sustituyendo por x su valor resulta que

$$\log.\sqrt[m]{y} = \frac{\log.\ y}{m}$$

que es lo que se debía demostrar.

5º *Todo logaritmo negativo corresponde á un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador el número al cual corresponde el logaritmo tomado como positivo.*

Si representando a la base se tiene, $y = a^{-x}$

poı la definición de logaritmo tendremos $-x = \log.\ y$ ....(1)

pero siendo $y = a^{-x}$, tendremos (299) $y = \dfrac{1}{a^x}$

sustituyendo en la ecuación (1 $-x = \log.\dfrac{1}{a^x}$

luego $-x$ es el logaritmo de un quebrado cuyo numerador es la unidad y su denominador el número a^x á que corresponde el logaritmo x tomado como positivo.

6º Las propiedades de los logaritmos nos sirven para poder determinar el valor de una cantidad que entra como exponente en una expresión, por lo cual se llaman *ecuaciones exponenciales.*

Así para resolver la ecuación $c=d^x$
en la que x es incógnita, basta tomar los logaritmos de los dos miembros de la ecuacióu, y según acabamos de demostrarlo (3°) se tiene:

$$\log.\ c=x \log.\ d$$

de donde $$x=\frac{\log.\ c}{\log.\ d}$$

Por los medios empleados pora resolver las ecuaciones nos habría sido imposible obtener el valor desconocido de un exponente.

326.—Formación de las tablas de logaritmos.—Vamos á dar una idea de la manera cómo se puede formar una tabla de logaritmos, que según lo hemos dicho ya, se compone de todos los números enteros, constando al lado de cada uno su logaritmo; esto es, la potencia á que es preciso elevar la base escogida para producir el número propuesto. Por ser 10 la base del sistema de numeración hay ventajas en tomar este número igualmente por base de los logaritmos, pues así, como veremos adelante, poniendo en armonía el sistema de logaritmos con el de numeración, puede determinarse más fácilmente la parte entera y aun la decimal de los logaritmos. Adoptando el número 10 por base, las series de los logaritmos y de los números serán:

logaritmos	÷0 . 1 . 2 . 3 . 4.............
números	∺1 : 10 : 100 : 1000 : 10000..........

De esto resulta que 0 es el logaritmo de 1, que 1 es el logaritmo de 10, que 2 lo es de 100, etc. Además, que los números comprendidos entre 1 y 10 tendrán por logaritmo una fracción decimal mayor que 0 y menor que 1: que los números comprendidos entre 10 y 100 tendrán por logaritmos números mayores que 1 pero menores que 2, etc.

Ahora bien, si en una progresión, sea aritmética ó geométrica, por ejemplo

÷0 . 3 . 6 . 9 . 12 . 15 . 18 . 21 . 24 . 27
∺1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512

se suprime un término alternativamente entre cada dos consecutivos, las nuevas series

÷0 . 6 . 12 . 18 . 24
∺1 : 4 : 16 : 64 : 256

estarán en progresión porque no se ha hecho más que duplicar la razón en la primera y elevarla al cuadrado en la segunda.

Si se suprimen dos términos alternativamente entre cada tres consecutivos, las nuevas series:

$$\div 0 \,.\, 9 \,.\, 18 \,.\, 27$$
$$\div\!\div 1 : 8 : 64 : 512$$

estarán en progresión, porque la razón aritmética se ha triplicado y la geométrica se ha elevado al cubo. Luego recíprocamente podemos considerar que las progresiones:

$$\div 0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \ldots\ldots$$
$$\div\!\div 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 \ldots\ldots$$

son parte de otras dos cuyos términos eran mucho más próximos, y de las cuales se han suprimido los términos intermedios:

Estos principios nos dan ya el medio de concebir un modo de formación de las tablas. Si suponemos que entre 1 y 10 se hayan interpolado un gran número de medios geométricos, como la serie se eleva de 1 á 10 por pequeñísimos grados, sucederá que entre esa multitud de medios geométricos se encontrarán los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, y 9 con la aproximación que se quiera. Si en seguida se interpolan entre 0 y 1 igual número de medios aritméticos, aquellos que ocupen en la progresión aritmética el mismo orden que los números 2, 3, 4..........8 y 9 ocupan en la geométrica, serán sus logaritmos. Operaciones y raciocinios análogos harán comprender la formación de los logaritmos de los números entre 10 y 100, entre 100 y 1000, etc.

La aproximación de los logaritmos comunmente se limita á la de siete cifras decimales.

Para interpolar un gran número de medios geométricos, es preciso extraer la raíz de un grado elevado, pero para evitar este inconveniente se procede interpolando solamente un medio geométrico y extrayendo sucesivamente varias raíces cuadradas.

Por ejemplo, si se quiere buscar el logaritmo del número 2, comenzaremos por interpolar un medio geométrico entre 1 y 10 cuyos logaritmos son 0 y 1. El medio geométrico es: 3'162 2777 cuyo logaritmo será 0'500 0000, medio aritmético entre 0 y 1; luego, buscaremos un medio geométrico entre 1 y el número encontrado 3'162 2777 y el resultado es 1'778 2794; y tomando un medio aritmético entre 0 y el logaritmo encontrado 0'500 0000 hallaremos 0'250 0000 como logaritmo del número 1'778 2794, así se continuará la operación como lo indicamos en seguida.

	Medios geométricos	Logaritmos
1.ª operación	1‘000 0000	0‘000 0000
	10‘000 0000	1‘000 0000
	3‘162 2777	0‘500 0000
2.ª	1‘000 0000	0‘000 0000
	3‘162 2777	0‘500 0000
	1‘778 2794	0‘250 0000
3.ª	1‘778 2794	0‘250 0000
	3‘162 2777	0‘500 0000
	2‘371 3737	0‘375 0000
4.ª	1‘778 2794	0‘250 0000
	2‘371 3737	0‘375 0000
	2‘053 5249	0‘312 5000
5.ª	1‘778 2794	0‘250 0000
	2‘053 5249	0‘312 5000
	1‘910 9529	0‘281 2500
6.ª	1‘910 9529	0‘281 2500
	2‘053 5249	0‘312 5000
	1‘980 9566	0‘296 8750

Continuando el mismo procedimiento, en la 24.ª operación se encuentra:

	Números.	Logaritmos.
	1‘999 9998.....	0‘301 0299
	2‘000 0004.....	0‘301 0301
Término medio.............	2‘000 0000.....	0‘301 0300

Luego el logaritmo del número 2 es 0‘301 0300.

Este método dilatado y penoso solo tendría que emplearse con los números primos, pues conocido por ejemplo, el logaritmo de 2 bastará sumarlo consigo mismo para tener el de 4; sumando el logaritmo de 4 con el de 2 se tendrá el de 8, y así sucesivamente se obtendrán todos los de los números potencias de 2. Hemos indicado este procedimiento con el solo fin de dar una idea del modo como podría formarse una tabla de logaritmos con los conocimientos que poseemos; pues aunque se limitara á los números primos, sería bastante penoso y por esto se emplean otros métodos que más tarde se conocerán.*

* Una de las fórmulas en uso para calcular los logaritmos, es la siguiente:

$$d=2M\left(\frac{1}{1(2z-1)}+\frac{1}{3(2z-1)^3}+\frac{1}{5(2z-1)^5}+\dots\right)$$

en la que d expresa la diferencia de los logaritmos de dos números consecutivos, esto es, $d=$log. $z-$log. $(z-1)$, y $M=0‘434\,294\,482$.........

Comunmente se usa esta fórmula calculando los logaritmos de los números de 10 000 en adelante, y se deducen de éstos los logaritmos de los números 10, 100..... veces menores. Por ejemplo: el logaritmo

327. —Determinación del logaritmo de un número en otro sistema.—Se pueden concebir una infinidad de sistemas de logaritmos, supuesto que puede tomarse por base un número cualquiera, pero dos son los sistemas generalmente usados: , 1.°, los *logaritmos vulgares*, conocidos bajo el nombre de *logaritmos de Briggs,* á causa de que este sabio publicó la primera tabla de este sistema en 1618 en Londres; 2.°, los llamados *neperianos, hiperbólicos* ó *naturales.* Estos últimos son debidos al célebre geómetra escocés Juan Néper, inventor de los logaritmos, cuyo uso facilita sobre manera los cálculos, quien publicó sus tablas en 1614, dos años antes de su muerte.

Los logaritmos neperianos han sido calculados en un sistema cuya base es el número 2'718 281 828...... y los logaritmos de Briggs tomando el número 10 por base.

Cuando se ha calculado una tabla de logaritmos en un sistema, es fácil convertirla en otra que tenga una base diferente.

Supongamos que conocidos los logaritmos neperianos ó hiperbólicos, cuya base es 2·718 281 828.... y que constan en las páginas nones de 171 á 189 de las tablas de Callet, se quieran transformar en logaritmos de Briggs ó vulgares, cuya base es 10.

Para facilitar nuestra explicación haremos la base de los logaritmos neperianos.

$$2'718\ 281\ 828\ 459\ldots = e$$

y la base de los logaritmos vulgares

$$10 = a$$

Representando y un número dado, tendremos:

$$y = e^{x'} \qquad \text{siendo } x' \text{ el Log. nep. de } y.$$

Como los logaritmos de cantidades iguales son iguales, tomando en el sistema cuya base es a los logaritmos de las cantidades que forman la ecuación $y = e^{x'}$, se tendrá:

---

de 10 000 es 4: haciendo $z = 10\ 001$ y calculando d por la fórmula anterior, se obtiene:

$$d = 0'000\ 043\ 425$$
$$\text{log. } 10\ 000 = 4'000\ 000\ 000$$

el log. de 10 001 será: $4'000\ 043\ 425$

Además, como permanece constante la diferencia d entre varios números seguidos, no es necesario calcularla entre todos los consecutivos sino que basta hacerlo solamente por tramos para cada grupo de números entre los que no cambia esta diferencia. Esta fórmula da el valor que en las tablas de Callet consta en el encabezado de la columna de las diferencias.

$$\text{log. } y = x'. \text{ log. } e$$

esto es, $\text{log. vulgar } y = \text{Log. nep. } y \times \text{log. vulgar } e.$

Para otro número cualquiera, y', se tendrá:

$$\text{log. vulgar } y' = \text{Log. nep. } y' \times \text{log. vulgar } e.$$

Esta ecuación expresa que *para transformar en logaritmo vulgar un logaritmo neperiano, bastará multiplicar éste por el logaritmo vulgar de la base del sistema neperiano de logaritmos.*

Este factor constante, —*log. vulgar de la base* e *del sistema neperiano*— por el cual es necesario multiplicar el Log. neperiano para convertirlo en vulgar, se llama *módulo,* y como el logaritmo vulgar de..... 2'718 281 828.... es igual á 0'434 294 482.... este último número es el módulo para pasar del sistema neperiano al de Briggs.

Supuesto que

$$\text{log. vulgar } y = 0'434\,294\,482 \times \text{Log. nep. } y$$

resulta que

$$\text{Log. nep. } y = \frac{\text{log. vulgar } y}{0{\cdot}434\ 294\ 482}$$

y el módulo

$$0{\cdot}434\ 294\ 482 = \frac{\text{log. vulgar } y}{\text{Log. nep. } y}$$

En general, si representamos el logaritmo cuya base es a por *log.*, el de otro sistema cualquiera cuya base sea e por Log. y por M el módulo, se tiene:

$$\text{log. } y = M. \text{ Log. } y$$

siendo M el log. de base e en el sistema cuya base es a, y además:

$$M = \frac{\text{log. } y}{\text{Log. } y}$$

luego dividiendo uno por otro los logaritmos de un mismo número y en dos sistemas, el cociente será el módulo relativo á estos sistemas.

En lo de adelante indicaremos el logaritmo de un número en un sistema cualquiera por el signo *Log.*, y reservaremos el uso del signo *log.* para los logaritmos de Briggs, cuya base es 10.

Problemas.—I. Siendo 2'718 281 828 la base de los logaritmos neperianos y el Log. Hip. de 240=5'480 6389, (pág. 173), se quiere determinar el log. vulgar de 240.

Sustituyendo en la fórmula:

$$\text{log. } y = M. \text{ Log. } y$$

se tiene: $\log: 240=0'434\ 2945\times5'480\ 6389$

$\log.\ 240=2'380\ 2112$

II.—Se quiere calcular el logaritmo hiperbólico de 100, conociendo su logaritmo vulgar, que es 2, y sabiendo que la base de los logaritmos vulgares es 10.

Si en la ecuación $100=10^2$

tomamos los logaritmos hiperbólicos tendremos:

$$\text{Log. Hip. } 100=2\times\text{Log. Hip. } 10$$

sustituyendo $\text{Log. Hip. } 100=2\times2{\cdot}302\ 5851=4'605\ 1702$

III.—Conociendo el logaritmo de 100, tanto en el sistema de logaritmos vulgares como en el de los hiperbólicos, calcular el módulo.

La fórmula respectiva es $M=\dfrac{\text{log. vul. } y}{\text{Log. Hip. } y}=\dfrac{\text{log. vul. } 100}{\text{Log. Hip. } 100}$

sustituyendo $M=\dfrac{2}{4'605\ 1702}=0'434\ 2945.$

328.—Característica de los logaritmos.—*Se llama característica de un logaritmo á su parte entera, y se llama mantiza á su parte decimal.*

Si en la ecuación fundamental de los logaritmos

$$y=a^x$$

en la que y representa un número cuyo valor depende del que se dé á x a la base constante, y x el logaritmo de y, hacemos de conformidad con el sistema de Briggs, $a=10$ y atribuimos á x valores negativos y positivos, tendremos, sustituyéndolos en la ecuación

$$y=10^x$$

para $x=-3.\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3$.........log.

$y=\frac{1}{1000},\quad \frac{1}{100},\quad \frac{1}{10},\quad 1,\quad 10,\quad 100,\quad 1000$...........números

y expresando los quebrados en forma decimal se tiene:

para $x=-3,\quad -2,\quad -1,\quad 0,\quad 1,\quad 2,\quad 3$........log.

$y=0'001,\quad 0'01,\quad 0{\cdot}1,\quad 1,\quad 10,\quad 100,\quad 1000$........números.

Habiendo tomado 10 por base, se ha puesto en armonía el sistema de logaritmos con el de numeración, y así se ha logrado que la *característica* de los logaritmos no sea necesario calcularla, pues fácilmente se determina por medio de pocas reglas, y que la *mantiza* de las decimales sea la misma que la de los números enteros.

Del examen de las dos series que se han obtenido dando á x valores enteros, negativos y positivos en la ecuación $y=10^x$, resultan las siguientes consecuencias:

1ª Los logaritmos de 10 y de todas sus potencias son números enteros —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, etc.

2ª Los logaritmos positivos corresponden á números mayores que la unidad, esto es, á enteros, ó á enteros juntos con decimales.

3ª Los logaritmos negativos corresponden á números menores que la unidad, esto es, á decimales, ó á quebrados cuyo numerador es la unidad, y su denominador el número á que corresponde el logaritmo tomado como positivo-

4ª *La característica del logaritmo de un número entero consta de tantas unidades como cifras tiene el número menos una.* En efecto, los números comprendidos entre 1 y 10, *que se escriben con un guarismo*, tienen por logaritmo *cero*, más una decimal. Los números comprendidos entre 10 y 100, *que se escriben con dos guarismos*, tienen por logaritmo 1 más una decimal. Los números comprendidos entre 100 y 1000, *que se escriben con tres guarismos*, tienen por logaritmo 2 más una decimal, etc.

5ª *La característica del logaritmo de un número mixto compuesto de enteros y decimales, es la que corresponde á la parte entera*, supuesto que todo número mixto está comprendido entre dos números enteros, cuyos logaritmos tienen la misma característica. Por ejemplo, 35'82, cuyo valor está comprendido entre 35 y 36, tendrá 1 por característica en razón de que tanto el logaritmo de 35 como el de 36 tienen 1 por característica.

6ª *La característica del logaritmo de una decimal, es negativa y consta de tantas unidades como ceros hay después de la coma más uno.* En efecto, los números decimales cuyo valor está comprendido entre 0'001 y 0'01, *que se escriben con dos ceros después de la coma*, tienen por logaritmo —3 *más* una decimal, esto es, su logaritmo será mayor que —3. Los números decimales comprendidos entre 0'01 y 0'1, *que se escriben con un cero después de la coma*, tienen por logaritmo —2 *más* una decimal. Los números decimales comprendidos entre 0'1 y 1, *que se escriben sin ningún cero después de la coma*, tienen, por logaritmo —1 *más* una decimal.

Como se habrá notado, el logaritmo de las decimales consta de dos partes: la característica, que es negativa, y la mantiza, que es positiva. Para representar este sistema, se coloca debajo del signo ménos únicamente la característica. Así, el log. de 0'075 que se escribe........... $\bar{2}$'875 06126, es una simplificación de la expresión

$$+0'875\ 06126-2.$$

En las decimales suele preferirse emplear en vez de las características negativas, sus complementos aritméticos.

Se llama complemento aritmético de un número lo que le falta para ser igual á la unidad seguida de tantos ceros como cifras tiene. Así, por ejemplo, el complemento aritmético de 38 es 100—38=62, y como las características de los logaritmos no tienen más que una sola cifra, su complemento aritmético se determina tomando su diferencia á 10.

Si tenemos, por ejemplo, que la característica de una decimal es —2 su complemento aritmético será 8, supuesto que

$$10-2=8$$

y en esta ecuación $$-2=8-10$$

Se ve, pues, que podemos reemplazar ó sustituir la característica negativa —2 por su complemento aritmético 8, pero teniendo cuidado de restar 10. A esta clase de características les llamaremos *características complementarias.*

Supuesto que para determinar el complemento aritmético de una característica la hemos de restar de 10, y que la característica negativa de una decimal consta de tantas unidades como ceros hay después de la coma más uno, tendremos:

$$\text{comp. aritm.}=10-(\text{n}^{\text{o}}\text{ de ceros}+1)=10-\text{n}^{\text{o}}\text{ de ceros}-1$$

luego $$\text{comp. aritm.}=9-\text{ número de ceros.}$$

de lo que se infiere que, *el complemento aritmético de la característica del logaritmo de una decimal es* 9, *ó un número tantas unidades menor que* 9, *como ceros hay después de la coma.* Por ejemplo, el logaritmo de 0'075 con característica positiva es 8·87506126; pero debe tenerse presente que este logaritmo es una simplificación de la verdadera expresión............ 8'87506126—10, teniéndose costumbre de omitir el —10. Por lo demás, es fácil comprobar que lo mismo es, $\bar{2}$'87506126 que............ 8'87506126—10. Para distinguir los logaritmos en que se ha tomado el complemento aritmético de la característica, y en los que se ha omitido —10, los anotaremos poniendo un punto entre la característica y la mantiza, en vez de poner una coma.

En el caso en que la decimal tuviera más de nueve ceros después de la coma, y que quisiera hacerse uso de las características complementarias, habría necesidad de tomar el complemento aritmético, restando la característica de 100, y recordar en las operaciones respectivas que está sobreentendida la resta de este número.

En lo que antecede se fundan las siguientes

Reglas para determinar las características de los logaritmos.—1ª *La característica del logaritmo de un número entero consta de tantas unidades como cifras tiene el número menos una.*

2ª *La característica del logaritmo de un número compuesto de enteros y decimales es la que corresponde á la parte entera.*

3ª *La característica del logaritmo de una fracción decimal es negativa y consta de tantas unidades como ceros hay después de la coma más uno.*

4ª *La característica complementaria del logaritmo de una fracción decimal es 9, ó un número tantas unidades menor que 9 como ceros hay después de la coma.*

Pondremos los siguientes ejemplos para determinar las características de los logaritmos de las diferentes especies de números.

Característica del logaritmo		del número	*entero*	3526=3'
"	"	"	"	8=0'
"	"	"	*mixto*	8'046=0'
"	"	"	"	325'75=2'
"	negativa de una		*decimal*	0'0035=$\bar{3}$'
"	"	"	"	0'8756=$\bar{1}$'
"	positiva de una		"	0'228=9'
"	"	"	"	0'004=7'

329.—Mantiza de los logaritmos.—Ya hemos dicho que se entiende por mantiza de un logaritmo su parte decimal, y antes de dar las reglas correspondientes para determinarla demostraremos el siguiente

Teorema.—*En el sistema de logaritmos vulgares la mantiza de un número 10, 100, 1000, etc., veces menor que otro es la misma que la de éste.*

Demostración.—Sabemos que el logaritmo del cociente de dos números es igual al logaritmo del dividendo menos el del divisor (325.—2º), y que tomando 10 por base del sistema de logaritmos, el logaritmo de este número 10 y de cualquiera de sus potencias es un número entero. (328.—1ª)

Si representamos por y un número cualquiera, $\frac{y}{10^n}$ representará otro número 10, 100, 1000, etc. veces menor que él y tendremos que

$$\text{logaritmo}\left(\frac{y}{10^n}\right)=\text{logaritmo } y-\text{logaritmo } 10^n$$

pero como 10 es la base del sistema, logaritmo $10^n=n$ y se tiene que

$$\text{logaritmo}\frac{y}{10^n}=\text{logaritmo } y-n$$

Ahora bien, como n es número entero, al restarlo del logaritmo y no se alterará la parte decimal, por lo cual el logaritmo de $\frac{y}{10^n}$ tendrá la misma mantiza que el logaritmo de y, que es lo que debíamos demostrar.

Por ejemplo, si el logaritmo de 75 es	1'87506126
el logaritmo de 7'5 será	1'87506126—log. 10
el logaritmo de 0'75 será	1'87506126—log. 100
el logaritmo de 0'075 será	1'87506126—log. 1000

pero como el logaritmo de 10 es 1, el de 100 es 2 y el de 1000 es 3 resulta que

siendo el logaritmo de	75 = 1'87506126
será el logaritmo de	7'5 = 0'87506126
será el logaritmo de	0'75 = $\bar{1}$,87506126
será el logaritmo de	0'075 = $\bar{2}$'87506126

lo que comprueba que el logaritmo de un número 10, 100, 1000, etc., veces mayor ó menor que otro no difiere de éste sino en la característica *teniendo la misma mantiza.*

Establecido este principio y habiendo dado una idea del modo de calcular los logaritmos de los números (326) podremos fijar las

Reglas para determinar las mantizas de los logaritmos.—1ª—*La mantiza del logaritmo de un número entero es la que se encuentra* (al lado de él) *en las tablas, según lo explicaremos después.* (333)

2ª—*La mantiza del logaritmo de un número mixto, compuesto de enteros y decimales es la que corresponde al número que resulta prescindiendo de la coma.*

3ª—*La mantiza del logaritmo de una fracción decimal, ya sea que se haga uso de las características negativas ó de sus complementos aritméticos, es la que corresponde al número que resulta prescindiendo de la coma.*

330.—Determinación del logaritmo de un número.—Para determinar el logaritmo de un número, primero se pondrá la característica que le corresponda conforme á las reglas dadas (228) según sea entero, mixto ó decimal; y en seguida se buscará en las tablas la mantiza que corresponda al número que resulte formado, prescindiendo de la coma en caso de que tenga decimales, ó en el de que el número sea fracción decimal.

Repetiremos, porque es preciso tenerlo presente en los cálculos, que en caso de servirse de las características negativas la mantiza es positiva; y que cuando para los logaritmos de las decimales se usan los complementos aritméticos de sus características, está sobreentendida la sustracción de 10.

Así, pues, logaritmo de 0'000416 $= \bar{4}$'6190033
es abreviación de $-4+0$'6190033
y logaritmo de 0'000416 $=$ 6'6190033
es abreviación de 6'6190033 $-$ 10

331.—Disposición de las tablas de logaritmos de Callet.—Entre las diversas tablas de logaritmos que hay, vamos á describir las de Callet, pues conocida la disposición de éstas, fácilmente podrá comprenderse cualquiera otra. Nos ocuparemos únicamente de las tablas de los números, por no tener necesidad por ahora de hacer uso de las líneas trigonométricas cuyos logaritmos constan también en las expresadas tablas.

Las tablas de Callet dan los logaritmos de los números hasta 108 000 con la aproximación de 7 y á veces de 8 cifras decimales. Están divididas en dos partes: en la primera constan los números desde el 1 hasta 1200; y en la segunda desde 1020 hasta 108000.

Antes hemos indicado que en todo logaritmo se distingue la parte entera, á la que se llama *característica*, y la parte decimal á la que se denomina *mantiza*. Como por reglas muy sencillas (328), puede determinarse la característica del logaritmo de un número, en las tablas de Callet no constan sino las mantizas.

En su primera parte, página 1 á 5, debajo de las columnas marcadas con la letra *N*, están los números desde 1 hasta 1200, y en la columna de la derecha al lado de los números constan las mantizas de sus respectivos logaritmos con la aproximación de ocho decimales.

En la segunda parte de las tablas, páginas 6 á 168, arriba de cada llana constan al lado de la letra N las tres primeras cifras del número con que empieza la llana, y al lado de la letra L, las tres primeras cifras de la mantiza con que comienza la misma llana. El examen de estas tres primeras cifras del número y del logaritmo que constan en cada página, facilita mucho el uso de las tablas. En esta segunda parte de las tablas nos ocuparemos de los *números*, de las *mantizas* y de las *diferencias* correspondientes á las mantizas.

Los números representados están divididos en dos partes: una que se compone de cuatro cifras, y desde la página 155 en adelante de cinco guarismos que constan en la columna de la izquierda, señalada arriba y abajo con la letra *N*, pudiendo considerarse esta parte como las decenas del número cuyo logaritmo se busca; y otra que puede reputarse como las unidades del número y que consta en una de las diez columnas de la derecha, marcadas arriba y abajo con las cifras 0, 1, 2.......8, 9. Así por ejemplo, en la página 100 tenemos en la primera línea superior los números 66600, 66601, 66602, etc., hasta 66609 compuestos de una parte, 6660, considerada como decenas y de las unidades de 0 á 9 en las diez columnas de la derecha. En la página 160, en la última línea, tenemos, siempre descompuestos en dos partes. los números 103190, 103191 hasta 103199.

Las *mantizas* de los logaritmos de los números están expresadas divididas en dos partes: hasta el número 99999 la primera parte de la mantiza es de tres cifras, y de 100 000 en adelante es de cuatro; pero en ambos casos está indicada á la izquierda en la columna marcada en cada página arriba y abajo con 0; las cuatro últimas cifras de la mantiza, que forman su segunda parte, constan en la tabla debajo de las cifras 0, 1, 2. . . .8, 9 que hemos dicho pueden reputarse como las unidades del número. Por ejemplo, en la página 100, la mantiza del logaritmo del número 66 600 será 823 4742, y la mantiza del número 66 609 será 823 5329. En la misma página la mantiza del logaritmo del número 67 143 es 827 0007. Aquí se ve que las cuatro últimas cifras de la mantiza están un poco más abajo de las cuatro primeras cifras 6714 del número, y esto es porque entre el número 67142 y 67143 cambian de 826 á 827 las tres primeras cifras de la mantiza. En la página 160 la mantiza del logaritmo del número 103 195 es 0136 5866; y la del número 103 159 es 01350712.

Á la derecha de las diez columnas de las unidades del número y debajo del encabezado "*dif.*" constan unas tablitas en las que el número superior indica *la diferencia* que existe entre las mantizas de los logaritmos de dos números consecutivos, cuya diferencia es la unidad, y debajo de ella, enfrente de los números 1 á 9 constan *las diferencias de la mantiza* correspondientes á 1, 2, 3. . . .9 *décimas* entre los números.

Por ejemplo, en la página 160	
la mantiza del log. del número	103 195 es 0136 5866
la del número	103 194 es 0136 5445
Diferencia correspondiente á 1 unidad	421

que es la que consta á la derecha en las tablas. Tomando sucesivamente $\frac{1}{10}, \frac{2}{10} \dots \frac{9}{10}$ de 421 se forma la tablita que consta debajo del expresado número 421, indicando por tanto los números 42, 84. . . . . .379 las diferencias de las mantizas correspondientes á las décimas entre los números.

332.—Los problemas relativos al uso de las tablas de logaritmos pueden dividirse en dos: *buscar el logaritmo de un número; y determinar el número á que corresponde un logaritmo dado;* pudiendo suceder que el número ó el logaritmo propuesto se encuentre en las tablas ó que no se halle en ellas. Vamos á considerar los diferentes casos que se presentan en los dos problemas dichos.

333.—Primer problema.—Determinar el logaritmo de un número.—Cuando se trata de determinar el logaritmo de un número por las tablas de Callet pueden considerarse los siguientes casos: 1.° cuando el número propuesto es menor que 1200: 2.° cuando es mayor que 1200 y menor que 108000: 3.° cuando es mayor que 108000: 4.° cuando está compuesto de enteros y decimales: 5.° cuando es una fracción decimal: 6.° cuando es un quebrado impropio ó consta de enteros y quebrados: y 7.° cuando es un quebrado propio.

Primer caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es menor que* 1200 *se pondrá su característica por la regla respectiva* (328) *y en seguida se buscará el número propuesto en la primera parte de las tablas, páginas* 1 *á* 5, *constando al lado de este número la mantiza correspondiente.*

Por ejemplo, se busca el logaritmo del número 976: su caracteristica es 2, y al lado del número 976 en la página 5, encontraremos la mantiza 98944982, por lo que:

logaritmo 976=2'98944982

Segundo caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es mayor que* 1200 *y menor que* 108000, se pondrá su característica por la regla correspondiente (328), en seguida se buscarán en la parte superior de las tablas al lado de la letra N las tres primeras cifras del número propuesto ó sus próximas menores; luego, se buscarán las decenas del número en la columna N y las unidades en una de las diez de la derecha, y se formará la mantiza escribiendo en primer lugar las tres primeras cifras que están en la columna cero, generalmente arriba de las decenas del número y á veces enfrente ó un renglón abajo de ellas, y en seguida las cuatro cifras que en la misma línea horizontal están bajo la columna indicada por las unidades del número propuesto.

Sea como ejemplo determinar el logaritmo del número 83564.

Su característica es 4, y su mantiza la hallaremos en la página 128. Siendo las decenas del número: 8356 y 4 sus unidades, las tres primeras cifras de su mantiza son 922 y las cuatro últimas 0192: luego

logaritmo 83564=4'9220192

Tercer caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es mayor que* 108000 se pondrá la característica que le corresponda, en seguida se separarán á la derecha las cifras que sea necesario para que á la izquierda quede un número menor que 108000 cuya mantiza se buscará: *si los guarismos separados á la derecha son más de dos,* se consideran como decimales y se multiplican por la diferencia logarítmica correspondiente á una unidad, agregando la parte entera del producto á la mantiza hallada para el número menor que 108000 que se separó á la izquierda: *si los guarismos separados á la dere ha del número propuesto son uno ó dos*, se determinará lo que ha de agregarse á la mantiza, como lo explicaremos en seguida, por medio de las diferencias logarítmicas de las partes de la unidad que constan en la última columna de la tabla debajo de la diferencia relativa á la unidad.

Sea como ejemplo determinar el logaritmo del número 92473268. La característica del logaritmo de este número será 7, y separando las tres últimas cifras de la derecha 268, determinaremos la mantiza del número 92473‘268 que es igual á la del propuesto (329). La mantiza de 92473 es ‘9660149 á la que debemos agregar la diferencia correspondiente á 0‘268 para tener la del número que buscamos. Supuesto que según se ve en las tablas, 47 es la diferencia que hay entre los logaritmos de dos números cuya diferencia es una unidad, determinaremos la diferencia correspondiente á 0‘268 por la siguiente proporción:

$$1 : 0‘268 :: 47 : x = 12‘596$$

$$\begin{array}{r} 0‘268 \\ 47 \\ \hline 1876 \\ 1072 \\ \hline 12‘596 \end{array}$$

En la práctica se omite establecer la proporción, pues siendo 1 el extremo conocido, *basta multiplicar la diferencia logarítmica de la unidad por la parte decimal.* Así, pues, tenemos:

	Mantiza de	92473=‘9660149
Diferencia correspondiente á 0‘268.....+		13
	Mantiza de	92473‘268=‘9660162
luego	logaritmo	92473268=7‘9660162

Sea como segundo ejemplo de este caso, determinar el log. del número 10734528. La característica será 7. Para dejar un número que se encuentre en las tablas separaremos los dos guarismos de la derecha y determinaremos la mantiza de 107345‘28 sirviéndonos de las diferencias logarítmicas de las partes:

Mantiza de	107345	= ‘0307 8182
Más dif. por	0‘2	81
Más dif. por	0‘08	32 ‘4
Mantiza de	107345‘28	= ‘0307 8295
log.	10734528	=7‘0307 8295

Estos resultados, como todos aquellos que no están en las tablas, no son enteramente exactos sino aproximados.

Cuarto caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca, está compuesto de enteros y decimales, se determina la característica correspondiente á la parte entera, y se busca la mantiza del número que resulte formado prescindiendo de la coma.*

Por ejemplo, se busca el logaritmo del número 532'685.

Estando comprendido este número entre 532 y 533, la característica de su logaritmo será la misma que la de la parte entera, esto es, 2. Respecto á la mantiza, como 532'685, es 1000 veces menor que 532 685 su mantiza será igual á la de este último número (329).

	Mantiza de	53268	='726 4664
	Dif. por	0·5	41
	Mantiza de	532685	='726 4705
luego	log.	532'635	=2'726 4705

Quinto caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es una fracción decimal,* se determinará su característica bien sea negativa ó positiva por las reglas dadas, (328—3.ª y 4.ª) y se buscará en las tablas la mantiza correspondiente al número que resulte formado prescindiendo de la coma. (329)

Sea como ejemplo, determinar el logaritmo de la fracción decimal 0,00985, su característica negativa será 3. La mantiza la hallaremos en la primera parte de las tablas, página 5, al lado del número 985 que resulta prescindiendo de la coma, y es 99343623. Por tanto

$$\text{log. } 0{\cdot}00985 = \bar{3}'99343623.$$

Sea como segundo ejemplo, determinar el log. de la fracción decimal 0'0978756 haciendo uso de las características positivas. La característica *positiva* será 8. (328—4.ª) La mantiza de

	97875	es 9906718	(pág. 152)
+ dif. por	0'6	27	
Mantiza de	978756	9906745	
Por lo que log.	0·0978756=8·9906745		

El 1er log. $\bar{3}'99343623$ es abreviación de $-3+0{\cdot}99343623$

El 2.º log. 8·9906745 es abreviación de 8'9906745—10

Ejecutando las restas indicadas se ve que son idénticos ambos valores.

Sexto caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es quebrado impropio, ó está compuesto de enteros y quebrados.* Si se trata de un quebrado impropio, su logaritmo se determinará restando del logaritmo del numerador el del denominador. Si se trata de un número mixto, se incorporará el entero con el quebrado, y en seguida se determinará el logaritmo del quebrado impropio.

Sea como ejemplo, determinar el logaritmo de $\frac{82745}{3560}$

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & 82745=4'917\ 7418 \\ \text{Menos log.} & 3560=3'551\ 4500 \\ \hline & 1'366\ 2918 \end{array}$$ será el log. de $\frac{82745}{3560}$

Esto está fundado en que todo quebrado es el cociente que resulta de dividir el numerador por el denominador, y en que el log. del cociente es igual al logaritmo del dividendo, menos el del divisor.

Sea como segundo ejemplo determinar el log. de $2+\frac{325}{650}$

Incorporando tendremos que $2+\frac{325}{650}=\frac{1625}{650}$

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & 1625=3'210\ 8534 \\ \text{Menos log.} & 650=2'812\ 9134 \\ \hline & 0'397\ 9400 \end{array}=\text{log. } 2+\frac{325}{650}$$

Séptimo caso.—*Cuando el número cuyo logaritmo se busca es un quebrado propio*, se determinará restando el logaritmo del denominador de el del numerador; pero pueden darse tres formas al resultado: 1.° con característica negativa; 2.° con el complemento aritmético de la característica; y 3.° con el de logaritmos defectivos, en los que tanto la característica como la mantiza, son negativas.

Sea como ejemplo determinar el log de $\frac{5}{8}$.

1.° Con característica *negativa*.

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & 5=0'698\ 97000 \\ \text{Menos log.} & 8=0'903\ 08999 \\ \hline & \bar{1}'795\ 88001 \end{array}=\text{log. } \frac{5}{8}.$$

Al ejecutar aqui la resta de las décimas, se ve que de 9 á 16 son 7 décimas que se escriben y va una unidad: de 1 á 0 la resta es—1, y por eso se ha indicado que la característica es negativa poniéndola debajo del signo —.

2.° Con característica *positiva*, que es un complemento aritmético.

$$\begin{array}{rr} \text{log.} & 5=0'698\ 97000 \\ \text{Menos log.} & 8=0'903\ 08999 \\ \hline & 9{\cdot}795\ 88001 \end{array}=\text{log. } \frac{5}{8}.$$

Aquí, al ejecutar la operación y al llegar á las décimas, se dice: de 9 á 16, 7 y va 1 que restaremos de 10, lo que da 9; agregando 10 unidades á la característica del minuendo. Naturalmente para restituir á este logaritmo, en el que entra el complemento aritmético de la característica, su verdadero valor, es preciso quitarle 10 unidades, operación que está sobreentendida, Así, pues, siempre que quiera determinarse el logaritmo de un quebrado con característica positiva, se tendrá cuidado de agregar á la memoria 10 unidades á la característica del minuendo.

3° Haciendo uso de los logaritmos defectivos:

Restaremos el log. de 5=0'698 97000
del log. de 8=0'903 08999 que tiene mayor valor y el resultado llevará signo —0'204 11999=log. $\frac{5}{8}$

En este último caso, tanto la característica como la mantiza, son negativas.

La forma más usada es la de característica negativa, y la menos empleada es la de logaritmos defectivos.

Por lo demás, como se habrá comprendido, estos tres resultados tienen el mismo valor, y no difieren sino en la forma. En efecto, bastará ejecutar las operaciones indicadas en cada expresión.

1° log. $\frac{5}{8}$=$\overline{1}$'795 88 001=—1+0'795 88 001=—0'204 11 999
2° =9'795 88 001= 9'795 88 001—10=—0'204 11 999
3° =—0'204 11 999=..................=—0'204 11 999

Sea como 2° ejemplo de este caso encontrar el logaritmo de $\frac{16}{2560}$, 1°: por característica negativa

log. 16=1'204 1200
Menos log. 2560=3'408 2400

$\overline{3}$'795 8800=log. $\frac{16}{2560}$

aquí al restar las primeras cifras de las mantizas se tiene: de 5 á 12 la diferencia es 7, y va 1 y 3 son 4: de 4 á 1 la diferencia es —3, que se escribe $\overline{3}$, para denotar que solo la característica es negativa.

2°: por complemento aritmético.

log. 16=1'204 1200
Menos log. 2560=3'408 2400

7'795 8800=log. $\frac{16}{2560}$

Aquí al ejecutar la operación se supone que la característica del log. de 16 es 11 en vez de 1.

3°: por logaritmo defectivo.

Restaremos el log. de 16=1'204 1200
del log. de 2560=3'408 2400 que tiene mayor valor, y el resultado será —2'204 1200=log. $\frac{16}{2560}$

334.—Ejemplos del primer problema de logaritmos.—Para ejercicio en el manejo de las tablas y de las reglas dadas, pondremos los siguientes ejemplos; debiendo los alumnos comparar los resultados que obtengan con los logaritmos que en seguida constan enfrente de cada número.

Determínense los logaritmos de los números:

1º 895 .... 2'951 82304
2º 0·000 32 con característica negativa .... $\bar{4}$'505 14998
3º 3'25 .... 0'511 88336
4º 8756 .... 3'942 3058
5º 32'286 .... 1'509 0142
6º 0'106 735 con característica negativa .... $\bar{1}$'028 30685
7º 32 726 875 .... 7'514 9045
8º 778'0537 .... 2'891 0006
9º 0'358 947 con característica negativa .... $\bar{1}$'555 0304
10º 0'000 25 con idem idem .... $\bar{4}$'397 9401
11º 0'045 726 con idem idem .... $\bar{2}$'660 1632
12º 0'369 728 con idem idem .... $\bar{1}$'567 8823
13º 0'000 0375 con característica positiva .... 5·574 03127
14º 0'874 9937 con idem idem .... 9·942 0050
15º 0'002 51 785 con idem idem .... 7·401 0299
16º $\frac{3225}{75}$ .... 1'633 4684
17º $25+\frac{7}{12}$ .... 1'407 95713
18º $555+\frac{16}{30}$ .... 2'744 7101
19º $\frac{894}{12167}$ con característica negativa .... $\bar{2}$'866 1540
20º $\frac{3268}{169726}$ con característica positiva .... 8·284 5336
21º $\frac{8275}{346789}$ su logaritmo defectivo .... —1'622 2973

335.—Segundo problema.—Determinar el número á que corresponde un logaritmo.—Consideraremos por separado los casos relativos á la mantiza y los correspondientes á la característica del logaritmo propuesto. Respecto á la mantiza ocurren dos casos: cuando ésta se encuentra en las tablas, y cuando no se encuentra exactamente en ellas. En cuanto á la característica, se presentan tres casos: cuando es positiva, cuando es negativa, y cuando es un complemento aritmético.

Primer caso.—*Cuando la mantiza del logaritmo dado se encuentra en las tablas.*

Encontradas las tres primeras cifras de la mantiza en la parte superior de las tablas al lado de la letra L ó sus próximas menores, se buscan en la columna 0 las tres primeras cifras de la mantiza. A la derecha ó abajo de éstas se buscan las cifras próximas menores que las cuatro últimas cifras de la mantiza, y una vez halladas, se continúa en la línea horizontal hasta encontrar las cuatro últimas cifras de la mantiza propuesta. El número á que corresponde tendrá por decenas los guarismos puestos bajo la columna *N*, en la misma línea y á la izquierda de los cuatro últimos guarismos de la mantiza, y por unidades el guarismo que está indicado en las tablas arriba y abajo en la columna donde constan los cuatro últimos guarismos de la mantiza.

Sea como ejemplo buscar el número á que corresponden los logaritmos

1º 4'978 3449=log. 95 136
2º 4'074 0481=log. 11 859
3º 4'545 0224=log. 35 077

Segundo caso.—*Cuando la mantiza del logaritmo dado no se encuentra exactamente en las tablas*, se busca según se ha explicado, la mantiza próxima menor que la del logaritmo propuesto, escribiendo debajo de sus cuatro últimas cifras las de la mantiza encontrada en las tablas, y á su derecha el número á que corresponde. En seguida se determina la diferencia que hay entre la mantiza hallada en las tablas y la del logaritmo dado; pudiendo suceder que esta *diferencia se encuentre entre las diferencias correspondientes á las décimas*, y que constan en la columna de la derecha de las tablas, ó *que no se encuentre entre éstas.* Si la diferencia de los logaritmos consta entre las de las décimas, el número que está á la izquierda se escribirá á continuación del número á que correspondió la mantiza próxima menor que la del logaritmo propuesto. *Si la diferencia de los logaritmos no consta entre las de las décimas, se divide por la diferencia logarítmica correspondiente á la unidad, y la parte decimal del cociente se escribirá á la derecha del número á que correspondió la mantiza próxima menor que la del logaritmo propuesto.*

Sea como ejemplo determinar el número á que corresponde el logaritmo 5'946 0724.

En la página 136 encontraremos la mantiza '946 0689 próxima menor que la del logaritmo propuesto, y la cual corresponde al número 88322. A la derecha del logaritmo dado escribiremos este número y abajo de las cuatro últimas cifras de su mantiza las halladas en las tablas.

5'946 0724=log. 88 322
0689

Dif. 35

Determinada la diferencia 35 entre la mantiza del logaritmo propuesto y la mantiza que se encuentra en las tablas, veremos si está entre las diferencias de las partes de la unidad; y encontrándose á la izquierda de 35 el número 7 décimas, pondremos este guarismo á continuación del número á que correspondió la mantiza de las tablas, y tendremos:

5‘946 0724=log. 883227

Determinaremos ahora el número á que corresponde el logaritmo 7‘995 4011.

En la pág. 153 encontramos la mantiza próxima menor ‘995 3982 que corresponde al número 98946.

7‘995 4011=log. 98946
3982

Dif. 29

no encontrándose la diferencia 29 entre las de las partes, debíamos establecer una proporción diciendo: si 44 de diferencia entre dos logaritmos corresponde á 1 de diferencia entre los números; cuando la diferencia sea 29, ¿cuál será la de los números?

$$44 : 1 :: 29 : x$$

pero en la práctica se omite establecer la proporción, y se divide 29 por 44, y el cociente aproximado es 0‘659. La parte decimal se escribe á continuación y á la derecha del número á que correspondió la mantiza encontrada en la tabla, y tendremos:

290	44
260	0‘659
400	
04	

7‘995 4011=log. 98 946 659

Pondremos como ejemplos de este caso los siguientes:

1º 5‘095 3264=log. 124 545
2º 7‘429 5513=log. 26 887 555
3º 5‘562 0286=log. 364 778
4º 7‘168 1009=log. 14 726 546

Regla.—*Para determinar el número á que corresponde un logaritmo se comienza por buscar el número á que corresponde la mantiza, prescindiendo de la característica, y en seguida se considera ésta atendiendo á si es positiva, negativa, ó un complemento aritmético.*

1º—*Si la característica es positiva, el número á que corresponde el logaritmo será entero, ó compuesto de enteros y decimales; constando la parte entera de tantos guarismos como unidades tenga la característica, más uno.* (328—1ª y 2ª).

2º—*Si la característica es negativa, el número á que corresponde el logaritmo será una fracción decimal, debiendo ponerse tantos ceros entre la* *coma y la primera cifra significativa como unidades tenga la característica menos uno.* (328—3ª)

3º—*Si la característica es un complemento aritmético, el número á que corresponde el logaritmo será una fracción decimal; debiendo ponerse tantos ceros entre la coma y la primera cifra significativa como unidades le faltan à la característica para ser igual á 9.* (328—4ª)

Por último, si todo el logaritmo es negativo, corresponderá á un quebrado cuyo numerador será la unidad y su denominador el número á que corresponda el logaritmo tomado como positivo. (328—5ª).

336.—Ejemplos del segundo problema de logaritmos.—Por vía de ejercicio de las reglas y explicaciones anteriores, los alumnos determinarán los números á que pertenecen los siguientes logaritmos.

1º	4‘978 2947	
2º	4‘587 0120	
3º	$\bar{2}$‘406 7343	
4º	$\bar{1}$‘089 1276	
5º	6·079 1812	la característica es comp. aritm.
6º	8·545 5124	idem. idem.
7º	—2‘736 3965	el log. es defectivo.
8º	—3‘989 3062	idem. idem.

Resoluciones.

1º	log. de	95125
2º	„	38637‘761
3º	„	0‘02551146
4º	„	0‘12278
5º	„	0‘00012
6º	„	0·0351106
7º	„	$\frac{1}{545}$
8º	„	$\frac{1}{9756{\cdot}77}=\frac{100}{975677}$

337.—Observaciones sobre el cálculo de logaritmos.—I.—Al ejecutar cualquiera operación en que entran logaritmos con características negativas, debe tenerse presente que la mantiza es positiva, y por tanto al sumar ó multiplicar esta clase de logaritmos, las unidades que resultan retenidas por las operaciones ejecutadas con las décimas de las mantizas son números positivos, de los que deben restarse las características negativas. Cuando hay que dividir por un número un logaritmo con característica negativa, es necesario agregarle á ésta el número de unidades negativas suficientes para formar un número que sea divisible exactamente, teniendo cuidado, para no alterar el resultado, de agregar el mismo número de unidades positivas reducidas á décimas á la primera cifra de la mantiza. Desde ahora llamamos la atención sobre este punto, sobre el que volveremos á insistir en el número 338 en los problemas respectivos.

II.—Cuando en los cálculos entran logaritmos cuya característica es un complemento aritmético, debe tenerse presente que se ha omitido la resta de 10 en cada logaritmo que contiene un complemento, por lo cual es necesario algunas veces expresar esta operación sobreentendida, otras es preciso suprimir en el resultado las decenas de la característica, y otras, por último, es forzoso agregar á la característica las decenas necesarias para que el resultado exprese el complemento aritmético de la característica. Presentaremos ejemplos de esta observación en el número 338 al resolver los problemas respectivos.

III.—Vamos á demostrar que *la diferencia logarítmica entre dos números consecutivos disminuye á medida que el valor absoluto de los números aumenta.*

Sean los números consecutivos y é $y+1$; la diferencia de sus logaritmos será

$$\log.(y+1)-\log. y=\log.\left(\frac{y+1}{y}\right)=\log.\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

llamando d la diferencia logarítmica correspondiente á la unidad, se tiene:

$$d=\log.\left(1+\frac{1}{y}\right)$$

como $\frac{1}{y}$ disminuye al crecer y, esta expresión nos hace comprender que el valor de d disminuye á medida que y aumenta, aproximándose más y más á $\log. 1=0$.

Por esto se habrá observado en las tablas que limitando la aproximación á siete cifras decimales á medida que el valor de los números aumenta, la diferencia de los logaritmos de los números consecutivos va disminuyendo sucesivamente, y además que esta diferencia permanece constante entre mayor cantidad de números.

Como los logaritmos son números en progresión aritmética que corresponden á números puestos en progresión geométrica, se comprende que para determinar el logaritmo de un número comprendido entre dos números cuyos logaritmos constan en la tabla, debía procederse interpolando respectivamente entre los números dados y entre sus logaritmos el número de medios geométricos y de medios aritméticos que fueran necesarios; pero en virtud de que cuando se limita la aproximación de los logaritmos á cierto número de cifras decimales, la diferencia entre los logaritmos consecutivos permanece *constante* entre muchos números, resulta que no hay inconveniente en considerar que la diferencia entre los logaritmos, dentro de determinados límites; es proporcional á la diferencia entre los números. En efecto, si cuando se limita el cálculo de las mantizas á 7 decimales es un hecho que por dos unidades de diferencia entre los números, hay entre sus logaritmos una diferencia doble de la que corresponde á la unidad; y si cuando la diferencia entre dos números es de 10 unidades, la diferencia entre sus logaritmos es 10 veces mayor que cuando difieren una unidad, es perfectamente fundado establecer que por una *fracción* de la unidad de diferencia entre los números debe corresponder la *misma fracción* de la diferencia logarítmica; pero debemos observar que esto solo es aproximado y que si se calcularan los logaritmos con mayor número de decimales, el procedimiento empleado no conduciría á un resultado exacto. Por esta razón es necesario llevar la aproximación á un grado mayor cuando los números pasan de cierto límite: así en las tablas de Callet desde 100000 en adelante los logaritmos están calculados ya con 8 cifras decimales.

IV.—A menudo sucede que aplicando los logaritmos al cálculo es necesario ejecutar operaciones con cantidades negativas; pero como hemos visto que tomando por base una cantidad positiva no se pueden representar por logaritmos las cantidades negativas; á fin de evitar esa dificultad, *cuando hay que ejecutar una operación por logaritmos en la que entran cantidades negativas, se buscan los logaritmos de éstas como si fueran positivas, se ejecutan las operaciones indicadas y el resultado se afecta del signo que le corresponde conforme á las reglas del Algebra.*

Por ejemplo, si se tiene que multiplicar 40 por —5, se buscarán los logaritmos de estos dos números, se sumarán, se buscará á qué número corresponde la suma, y este número se afectará del signo menos.

Si tenemos que elevar —20 al cuadrado, multiplicaremos por 2 el logaritmo de 20, y el número á que corresponda lo precederemos del signo *más* porque toda potencia par de una cantidad negativa da un resultado positivo.

338.—Operaciones y problemas resueltos por logaritmos.—Los problemas que pueden resolverse por logaritmos son numéricos ó algebráicos: los primeros tienen por objeto ejecutar con los números las operaciones que pueden efectuarse por medio de logaritmos, y los segundos tienen por objeto la resolución ó transformación de las ecuaciones valiéndose de los logaritmos.

Ni la suma ni la resta pueden ejecutarse con los logaritmos; pero sirviéndose de ellos se facilita la multiplicación, la división, la elevación á potencias y la extracción de raíces, y según se ha visto (325) las reglas que deberán seguirse para ejecutar estas operaciones son las siguientes:

1.° *Para multiplicar dos ó más números se buscarán los logaritmos de los factores, se sumarán y se buscará el número á que corresponde la suma de los logaritmos, y este número será el producto buscado.*

2.° *Para dividir dos números se restará el logaritmo del divisor del logaritmo del dividendo, y se determinará el número á que corresponde la diferencia de los logaritmos, el cual será el cociente buscado.*

3.° *Para elevar un número á una potencia dada, se multiplicará el logaritmo del número por el exponente de la potencia y determinando el número á que corresponde el logaritmo obtenido, se tendrá la potencia buscada.*

4.° *Para extraer la raíz de un número se dividirá el logaritmo del número por el índice de la raíz, y determinando el número á que corresponde el logaritmo obtenido, se tendrá la raíz buscada.*

Cuando en las operaciones entran logaritmos con características negativas se hará de modo que la mantiza sea siempre positiva; y cuando los logaritmos están representados por medio de los complementos aritméticos de las características, se tendrá presente al ejecutar las operaciones que está sobreentendida la resta de 10 unidades.

Vamos á resolver conforme á estas reglas los siguientes problemas numéricos:

I.—Multiplicar los números enteros 375 por 2846.

log. 375=2'5740313
Más log. 2846=3'4542349
6'0282662=log. 1067250 producto buscado.

II.—Determinar el producto de 82'96×0'048.

log. 82'96=1'9188687
Más log. 0'048=$\bar{2}$'6812412
0'6001099
0'6001013=log. 3'9820
Dif. 86 que corresponde á 0'8·

El producto de los números dados es 3'98208.

III.—Determinar el producto de las decimales 0'345×0'00428.

log. 0'345 = $\bar{1}$'5378191
Más log. 0'00428 = $\bar{3}$'6314438

$\bar{3}$'1692629 = 0'0014766 producto.

IV.—Determinar el producto 0'345 × 0'00428 haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

log. 0'345 = 9·537 8191
Más log. 0'00428 = 7·631 4438

(1)7·169 2629 = 0'0014766 producto.

Aquí debe suprimirse una decena en el logaritmo de la suma por haberse empleado dos complementos aritméticos y deberá quedar comprendido en el resultado un complemento.

V.—Determinar el cociente de 82225 dividido por 50.

log. 82225 = 4'9150039
Menos log. 50 = 1'6989700

3'2160339 = log. 1644'5 cociente.

VI.—Dividir 0'095 por 2'85

log. 0'095 = $\bar{2}$'9777236
Menos log. 2'85 = 0'4548449

$\bar{2}$'5228787 = log. 0'033 333 cociente.

VII.—Dividir 0'985 por 0'0075

log. 0'985 = $\bar{1}$'9934362
Menos log. 0'0075 = $\bar{3}$'8750613

2'1183749 = log. 131'33
3639

Dif. 1100 | 331
1070 | 0·33
077

El cociente buscado será 131'3333.

VIII.—Determinar el cociente de 0'985 dividido por 0,0075 haciendo uso del complemento aritmético de las características.

log. 0'985 = 9·993 4362
Menos log. 0'0075 = 7·875 0613

2'118 3749 = log. 131'333. Este resultado no ha necesitado modificarse, porque habiendo un complemento en el minuendo y otro en el sustraendo, esto equivale á haber agregado + 10 á los dos términos.

IX.—Dividir 0'00096 por 0'6 haciendo uso de características negativas y también de sus complementos aritméticos.

Por características negativas.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 0'00096 = & \bar{4}'98227123 \\ \text{Menos log. } \quad 0'6 = & \bar{1}'77815125 \\ \hline & \bar{3}'20411998 = \text{log. } 0'0016. \end{array}$$

Al llegar á restar las características debiendo restarse —1 de —4, la operación es—4—(—1)=—4+1=—3; cuyo resultado nos indica que el número á que corresponde el logaritmo es una fracción decimal que debe tener dos ceros entre la coma y la primera cifra significativa.

Por complemento aritmético de las características.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 0'00096 = & 6{\cdot}982\ 27123 \\ \text{Menos log. } \quad 0'6 = & 9{\cdot}778\ 15125 \\ \hline & 7{\cdot}204\ 11998 = 0'0016 \end{array}$$

No siendo posible restar la característica 9 de 6 se agregan á esta 10 unidades y se resta 9 de 16, lo que equivale á determinar el complemento aritmético de la característica —3, que sin esto se hubiera encontrado. Sabiendo que en el resultado la característica expresa un complemento aritmético, corresponderá á la decimal 0'0016.

X.—Elevar 625 al cubo por logaritmos.

$$\begin{array}{lrl} \text{log. } 625 = & 2'795\ 8800 & \\ \text{Multiplicado por} \quad 3 = & 8'387\ 6400 & = \text{log. } 24414 \\ & 6389 & \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rr|l} \text{Dif.} & 1100 & 178 \\ & 320 & \overline{} \\ & 1420 & 0'0617 \\ & 174 & \end{array}$$

Así 625^3=244140618

resultado aproximado que difiere del verdadero 7 unidades, diferencia realmente corta cuando se trata de un valor que pasa de 244 millones, y se atiende á la facilidad con que se ha obtenido por medio de los logaritmos.

XI.—Elevar 0'08 á la cuarta potencia por logaritmos.

$$\begin{array}{lr} \text{log. } 0'08 = & \bar{2}'903\ 08999 \\ \text{Multiplicado por} \quad 4 = & \bar{5}'612\ 35996 = \text{log. } 0'000040960. \end{array}$$

Al acabar de multiplicar la mantiza, decimos: 4 por 9 son 36: escribimos 6 décimas y retenemos 3 unidades positivas. En seguida 4 por —2 da —8 y +3 retenidas=—5 que es la característica que ponemos.

Así, pues, $0'08^4=0'00004096$.

XII.—Elevar 0'08 á la cuarta potencia haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

$$\log. 0{\cdot}08=8{\cdot}903\ 08999$$

Multiplicado por 4=(3)5·612 35996=0'000040960.

Al multiplicar la característica por 4 se obtiene el producto 35, y habiendo entrado cuatro complementos en este resultado debíamos rebajar 4 decenas; pero no siendo esto posible, si no se quiere un resultado negativo, suprimimos las 3 que hay, quedando un complemento aritmético, por lo cual el logaritmo hallado 5·61235996 corresponderá á una decimal que tiene cuatro ceros después de la coma.

Cuando se quiere tener más aproximación al elevar un número á una potencia se toma su logaritmo con mayor número de cifras decimales en las tablas de Callet, que constan de la página (170) á (188).

XIII.—Extraer la raíz 8.ª de 5764801

$$\begin{array}{rr}
\text{mantiza log. } 57648= & '760\ 7842 \\
\text{diferencia por } 0'01= & 0'8 \\
\hline
\text{log. } 5764801= & 6'760\ 7843 \\
\tfrac{1}{8}= & 0'845\ 0980=\text{log. } 7.
\end{array}$$

Luego $\sqrt[8]{5764801}=7$

XIV.—Extraer la raíz 4.ª á la decimal 0'000 04096

$$\log. 0'000\ 04096=\bar{5}'612\ 3599$$
$$\tfrac{1}{4}=\bar{2}'903\ 08998=\log. 0'08$$

Luego $\sqrt[4]{0{\cdot}000\ 04096}=0'08$

Al tener que tomar la cuarta parte del log. $\bar{5}'612\ 3599$ á fin de hacer que la mantiza del nuevo logaritmo sea positiva y sólo la característica sea negativa, hemos agregado á la característica $\bar{5}$,—3 unidades para obtener el número $\bar{8}$ que es divisible exactamente por 4; la cuarta parte de $\bar{8}$ es $\bar{2}$; y para compensar las 3 unidades quitadas al logaritmo $\bar{5}'612\ 3599$, al continuar la división se las agregamos á la mantiza reducidas á décimas y decimos: cuarta de 36 décimas es 9 décimas. Esta operación equivale á quitar y agregar un mismo número á una cantidad, así se tiene:

$$\bar{5}'612\,3599=-5+0'612\,3599=-5-3+3+0'612\,3599=\bar{8}+3'612\,3599$$

por lo que se vé que el valor del logaritmo no se ha alterado; y se ha conseguido que la mantiza sea positiva.

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla.—*Cuando se tenga que dividir un logaritmo cuya característica sea negativa, por un número que no la divida exactamente, se le agregará el número de unidades que sea necesario para formar el divisor ó un múltiplo del divisor; se dividirá la característica negativa así formada; se tendrá cuidado de agregar á las décimas de la mantiza el mismo número que se agregó á la característica, reducido á décimas; se dividirán éstas por el número dado, y se continuará la operación.*

Esta regla es de muy frecuente uso.

Extraer la raíz 4ª de la decimal 0'000 04096 haciendo uso de los complementos aritméticos de las características.

$$\log.\ 0'000\ 04096 = 5{\cdot}612\ 3599$$
$$\tfrac{1}{4} = 8{\cdot}903\ 08998 = \log.\ 0'08$$

Luego $\sqrt[4]{0{\cdot}000\ 04096} = 0'08$

Al tomar la cuarta parte del log. 5·612 3599 con el objeto de hacer que en el resultado esté expresado el complemento aritmético de la característica agregamos 3 decenas, y se toma la cuarta parte de 35 que es 8, y sobran 3 unidades que se unen á las décimas, se toma la cuarta de 36 que es 9 y se continúa la operación. Este procedimiento está fundado en que al extraer la raíz de una cantidad por logaritmos es preciso restituir las decenas de la característica que se han suprimido al elevarla á la potencia respectiva, y las cuales son tantas unidades como tiene el índice de la raíz menos una. En efecto, si se eleva á la cuarta potencia el número cuyo logaritmo es 8·903 0899, indicando la característica un complemento aritmético, al multiplicar este logaritmo por 4 la característica será 35; luego al extraer la raíz deberán restituirse las 3 decenas suprimidas.

De otro modo:

$$\log.\ 0'000\ 04096 = 5{\cdot}612\ 3599 = -10 + 5'612\ 3599$$

Si tenemos que dividir este logaritmo por 4 y queremos que el resultado sólo se componga de —10+ un cierto logaritmo para que la parte negativa pueda dividirse exactamente por 4, tendremos que restar y sumar á este valor 30, que son tantas decenas como unidades tiene el índice de la raíz menos una. Así tendremos:

$$-10 + 5'612\ 3599 = -10 - 30 + 30 + 5'612\ 3599 =$$
$$-40 + 35'612\ 3599$$

tomando la cuarta parte del último valor $\quad -10 +\ 8'903\ 0899$

resultado que expresa un complemento aritmético.

En lo expuesto se funda la siguiente

Regla.—*Cuando se tenga que extraer la raíz de un número decimal en cuyo logaritmo se exprese el complemento aritmético de la característica, antes de dividir el logaritmo por el índice de la raíz, se le agregarán á la característica tantas decenas como unidades tenga el índice menos una: se ejecutará la división y el logaritmo que resulte corresponderá á una decimal, cuyo valor se determinará atendiendo á que la característica del logaritmo encontrado expresa un complemento aritmético.*

339.—Aplicaciones de los logaritmos en las expresiones algebraicas.— Las propiedades de los logaritmos son de gran uso en Algebra, sea para transformar algunas expresiones, sea para resolver determinados problemas, para lo cual ponemos á continuación los siguientes ejemplos:

$$\log{:}\ abc = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c.$$

$$\log.\ \frac{a}{b} = \log.\ a - \log.\ b.$$

$$\log.\ \frac{abc}{df} = \log.\ a + \log.\ b + \log.\ c - \log.\ d - \log.\ f.$$

$$\log.\ a^n = n \log.\ a;\ \log.\ a^n b^r c^s = n \log.\ a + r \log.\ b + s \log.\ c.$$

$$\log.\ a^{-n} = \log.\frac{1}{a^n} = -n \log.\ a;\ \log.\ a^{\frac{n}{r}} = \frac{n}{r} \log.\ a.$$

$$\log.\frac{bx^n}{d^r} = \log.\ b + n \log.\ x - r \log.\ d$$

$$\log.\ \frac{ab+bc}{m+n} = \log.\ b + \log.\ (a+c) - \log.\ (m+n)$$

$$\log.\ \sqrt{x^2+y^2} = \tfrac{1}{2} \log.\ (x^2+y^2)$$

$$\log.\ \frac{a+x}{a-x} = \log.\ (a+x) - \log.\ (a-x)$$

$$\log.\ \sqrt{a^2-x^2} = \tfrac{1}{2} \left(\log.\ (a+x) + \log.\ (a-x) \right)$$

$$\log.\ x^3 + \log.\ x^{\frac{3}{4}} = 3 \log.\ x + \tfrac{3}{4} \log.\ x = \frac{15}{4} \log.\ x$$

$$\log.\ \sqrt[n]{(a^3-x^3)^m} = \frac{m}{n} \log.\ (a^3-x^3) = \frac{m}{n} \log.\ [a-x]$$

$$+\frac{m}{n} \log.\ (a^2+x^2+ax)$$

$$\log.\ \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{(a+x)^2} = \tfrac{1}{2} \log.\ (a^2-x^2) - 2 \log.\ (a+x)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log.\ (a+x) + \tfrac{1}{2} \log.\ [a-x] - 2 \log.\ (a+x)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log.\ [a-x] - \tfrac{3}{2} \log.\ (a+x)$$

$$\log. z^3+\tfrac{3}{4}\log. z=3\log. z+\tfrac{3}{4}\log. z=\frac{15}{4}\log. z=\log. z^{\frac{15}{4}}$$

$$=\log. \sqrt[4]{z^{15}}$$

Aunque las cantidades negativas no tienen logaritmos reales. . . . (324—3°) hemos dicho que para obviar este inconveniente se hace us. de la siguiente

Regla—*Cuando en un cálculo entren una ó varias cantidades negativas, se tomarán sus logaritmos considerándolas como positivas, y el resultado se afectará del signo que le corresponde por las reglas del Algebra.* (337.—IV.)

340.—Ecuaciones exponenciales.—Se llaman ecuaciones exponenciales aquellas en que la incógnita está como exponente de una cantidad. La resolución de esta clase de ecuaciones se efectúa tomando los logaritmos de las cantidades que las forman:

Así por ejemplo, si se tiene la ecuación

$$a^x=b$$

tomando los logaritmos se tiene

$$x. \log. a=\log. b.$$

de donde $$x=\frac{\log. b}{\log. a}$$

Debemos advertir que el valor de esta expresion es exacto considerado algebráicamente, pero desde el momento en que se dan valores numéricos á las cantidades, como los logaritmos son números comunmente inconmensurables que solo pueden ser aproximados, resulta también que el valor numérico de la incógnita sólo puede obtenerse por aproximación.

Si se quiere resolver la ecuación $b^{c^z}=d$, con respecto á z haremos $c^z=x$, y tendremos $b^x=d$, de donde

$$x=\frac{\log. d}{\log. b}=c^z$$

volviendo á tomar los logaritmos se tiene:

$$z\log. c=\log. \left(\frac{\log. d}{\log. b}\right)=\log. \log. d-\log. \log. b$$

$$z=\frac{\log. \log. d-\log. \log. b}{\log. c}$$

para obtener el logaritmo del logaritmo de d, se considera $\log. d$ como un número ordinario.

Así es como pueden resolverse las *ecuaciones exponenciales de diver-*

sos órdenes. El resultado numérico será aproximado, porque los logaritmos son valores aproximados.

En la progresión geométrica, se ha visto que el último término se determina por la fórmula

$$l = aq^{n-1}$$

en la que n entra como exponente: y cuando la incógnita es el número de términos de la progresión, tendremos que resolver la ecuación exponencial por medio de logaritmos.

$$\log. l = \log. a + (n-1) \log. q,$$

de donde $$n = \frac{\log. l - \log. a}{\log. q.} + 1$$

Sea como ejemplo, determinar el número de términos de una progresión geométrica en la que el primer término es 3, la razón es 4, y el último término 3072. Tendremos:

$$\begin{array}{rl}
\log. 3072 = & 3'487\ 4212 \\
\text{Menos } \log. 3 \quad = & 0'477\ 1212 \\
\hline
\log. l - \log. a = & 3'010\ 3000 \;\big|\; 0'602\ 0600 = \log. 4 \\
 & 000\ 0000 \;\big|\; 5
\end{array}$$

luego $n=6$. En efecto, la progresión es

$$\div 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072$$

aquí el resultado fué exacto, pero las mas veces solo es aproximado.

341.—Funciones algebraicas simples.—Con la relación correspondiente á las ecuaciones exponenciales, hemos completado el corto cuadro de las funciones analíticas simples de que se hace uso en el Algebra.

Si llamamos x la variable independiente, é y la variable correlativa que depende de ella, tendremos expresadas en las ocho fórmulas siguientes todas las funciones simples de una sola variable de que se sirve el Algebra, teniendo cada función su *inversa*, que resulta de la *directa* cuando se relaciona x á y en lugar de relacionar y á x:

1° $\begin{cases} y = a + x \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{suma} \\ y = a - x \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{diferencia.} \end{cases}$

2° $\begin{cases} y = ax \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{producto.} \\ y = \frac{a}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{cociente.} \end{cases}$

3° $\begin{cases} y = x^a \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{potencia.} \\ y = \sqrt[a]{x} \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función de } \textit{raíz.} \end{cases}$

4° $\begin{cases} y = a^x \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{función } \textit{exponencial.} \\ y = \log. x \text{ (siendo } a \text{ la base)} & \text{función } \textit{logarítmica.} \end{cases}$

La dificultad que presentan algunas cuestiones para resolverse por Algebra, consiste principalmente en que no disponemos sino de un corto número de funciones simples elementales para poder formar ecuaciones que expresen las relaciones que ligan las cantidades desconocidas con las conocidas. Las ocho funciones anteriores, expresan las operaciones simples fundamentales, por medio de las cuales se engendra una cantidad desconocida de un modo peculiar y diferente en cada una de ellas.

REGLAS DE ALIGACIÓN, INTERES Y ANUALIDADES.

342.—Casos y fórmulas de las reglas de aligación.—Dos son los casos relativos á las cuestiones comprendidas en la regla que generalmente se llama de *aligación:* 1º, *cuando conociéndose el número de unidades y el precio de la unidad en cada una de varias clases de un efecto, se trata de determinar el precio medio de la mezcla;* 2º, *cuando conociéndose los precios de cada una de las clases de un efecto, se quiere determinar cuántas unidades deben tomarse de cada clase para que la mezcla pueda venderse a un precio medio fijo.*

Por ejemplo, es un problema relativo al primer caso el siguiente:

Habiéndose comprado tres partidas de maiz
una de 400 cargas á $4‘50 carga
otra de 600 „ á 5 „ „
y otra de 700 „ á 4‘25
se quiere determinar el precio medio de cada carga de la mezla total.

Es un problema relativo al segundo caso el siguiente:

Teniendo aguardiente de dos clases
una que vale á 40 $ el barril
otra que vale á 62 $ el id
se quiere saber cuántos barriles de aguardiente se han de tomar de cada una de las dos expresadas clases para formar una mezcla cuyo precio medio sea de 50 $.

Comprendidos bien los casos de la regla de aligación, vamos á ocuparnos en fijar las fórmulas que sirven para resolver cada uno de ellos; pero antes diremos que *por precio se entiende el valor de la unidad*, y que conforme al primer uso de la multiplicación *el valor total de un efecto se obtiene multiplicando el número de unidades por el precio de la unidad.*

El principio que nos servirá de fundamento para deducir las fórmulas de aligación es el siguiente:

La suma de los valores de las partes de la mezcla, estimando cada parte á su precio, es igual al valor de la mezcla al precio medio, supuesto que lo mismo ha de ser vender cada clase á su precio que la mezcla al precio medio.

Primer caso.—Si llamamos c, c', c'' las cantidades de cada una de las clases de un efecto, p, p' y p'', los precios respectivos de cada clase, y m el precio medio de la mezcla, en virtud del principio que antecede podemos establecer la siguiente ecuación:

$$cp+c'p'+c''p''=(c+c'+c'')m$$

de la que despejando á m tendremos

$$m=\frac{cp+c'p'+c''p''}{c+c'+c''}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

esta fórmula, que fácilmente puede ampliarse para cuando se conocen más de tres clases de un efecto y sus precios, nos servirá para resolver los problemas del primer caso de la regla de aligación, enseñándonos que *el precio medio es igual al cociente que resulta de dividir la suma de los productos de cada cantidad por su precio, por la suma de las cantidades.*

Conocido el precio medio que da la fórmula (1) sin perder ni ganar, será fácil determinar por medio de una simple proporción, el precio de la mezcla cuando se quiera perder ó ganar un tanto por ciento.

Si por ejemplo, se quiere fijar el precio de la mezcla ganando un 5 por ciento sobre los precios de compra, se pondrá:

$$100 : 5 :: m : x=\frac{5m}{100}$$

y el precio será$=m+x=m+\dfrac{5m}{100}=\dfrac{105m}{100}$

Segundo caso.—Si conocidos los precios de dos clases de un efecto, que llamaremos p y p', y el precio medio m á que se ha de vender la mezcla se quieren determinar las porciones x é y que de cada clase se han de tomar para formar una mezcla cuyo precio medio sea m, tendremos, que siendo el valor de la mezcla al precio medio igual á la suma de los importes de cada porción á su precio respectivo, podrá establecerse la siguiente ecuación:

$$(x+y)m=px+p'y$$

ejecutando la multiplicación indicada, pasando al primer miembro los términos que contienen á x, y al segundo los que no la contienen, resultará

$$xm-px=p'y-ym$$

sacando á x y á y como factor común, se tiene:

$$x\,(m-p)=y\,(p'-m)\ldots\ldots(a)$$

estando pues establecido el problema en una sola ecuación con dos incógnitas, es claro que es indeterminado, obteniéndose fácilmente de la última ecuación un valor para x dando otro arbitrario á y; pero en la práctica lo que se determina es la relación que debe haber entre la porción del efecto de la clase cuyo precio es p, y la de la otra clase cuyo precio es p'; siendo muy fácil sacar la expresada relación de la ecuación (a) pasando y al primer miembro y $m-p$ al segundo.

$$\frac{x}{y}=\frac{p'-m}{m-p}$$

formando una proporción

$$x : y :: p'-m : m-p$$

luego la porción de la cantidad del efecto cuyo precio es p, es á la porción de la cantidad cuyo precio es p', como la diferencia entre el 2º precio p' y el precio medio, es á la diferencia entre dicho precio medio y el primer precio p.

Comunmente la operación se dispone como sigue:

precio medio $=m$ $\begin{cases} p \;\ldots\ldots p'-m = \text{cant. de la clase cuyo precio es } p \\ p' \ldots\ldots m-p = \text{cant. de la clase cuyo precio es } p' \end{cases}$

debiendo ser $m<p'$ y $m>p$, ó bien $m>p'$ y $m<p$.

Determinada la relación en que deben mezclarse las clases del efecto para obtener una mezcla cuyo precio es m, fácilmente podrá deducirse la porción de una de las clases que ha de mezclarse con una cantidad fija de la otra clase; ó bien las porciones que han de formar una cantidad determinada de mezcla. Al resolver los problemas de este segundo caso de la regla de aligación haremos ver que basta establecer una proporción para obtener las cantidades de cada clase que satisfagan las indicadas condiciones, y lo que se hace cuando hay más de dos clases.

343.—Problemas de la regla de aligación.—I.—Se han comprado 800 arrobas de sal á razón de $0'80 la arroba; 1000 arrobas á $1, y 600 arrobas á $0'75 y se quiere determinar el precio medio de la mezcla.

Sustituyendo en la fórmula (1) $m=\dfrac{cp+c'p'+c''p''}{c+c'+c''}$

los valores de los datos del problema se tiene:

$$m=\frac{800\times0'80+1000\times1+600\times0'75}{800+1000+600}$$

se obtiene que el precio medio de la arroba es $0 87$\frac{1}{2}$.

II. Se tienen 80 quintales de ácido sulfúrico á $22, y 70 quintales á $16; se quiere determinar el precio medio de la mezcla ganando el 5 por ciento sobre el costo.

Siendo un problema del primer caso, la fórmula correspondiente es:

$$m=\frac{cp+c'p'}{c+c'}$$

Sustituyendo se tiene $m=\frac{80\times22+70\times16}{80+70}=\$19'20$

supuesto que se ha de utilizar el 5 por ciento pondremos:

$$100 : 5 :: 19'20 : x=\$0'96$$

Sumando $19'20 con 0'96 tendremos que $20'16 será el precio pedido

III. Se tiene vino de dos clases, uno cuyo precio es 40 centavos de peso la botella, y otro cuyo precio es 65 centavos. Para formar una mezcla que pueda venderse á razón de 50 centavos la botella, se trata de determinar cuántas botellas se han de tomar de cada clase de vino.

Siendo este un problema relativo al 2º caso, haremos uso de la fórmula:

$$m\begin{cases} p \ldots\ldots\ldots p'-m \\ p' \ldots\ldots\ldots m-p \end{cases}$$

y sustituyendo los valores del problema tendremos:

$$\text{50 centavos}\begin{cases} 40 \ldots\ldots\ldots\ldots 15 \text{ botellas} \\ 65 \ldots\ldots\ldots\ldots 10 \quad ,, \end{cases}$$

resultando que la relación en que deben mezclarse los vinos es la de 15 botellas del vino de á 40 centavos con 10 del de á 65 centavos.

IV. Se tiene aceite de tres clases, de á $36 barril, de á 28 y de á 22, y se quiere determinar la relación en que deben mezclarse para poder vender la mezcla á $30 pesos el barril.

Este problema en el que hay efectos de *tres* clases, cuyos precios se conocen, nos va á servir para explicar el procedimiento que se emplea para resolver el 2º caso de la regla de aligación cuando hay conocidos más de dos precios.

Dispondremos los datos de nuestro problema como sigue:

$$\text{Precio medio \$30}\begin{cases} \text{\$36 precio de la 1ª clase de aceite.} \\ 28 \quad ,, \quad 2^a \quad ,, \\ 22 \quad ,, \quad 3^a \quad ,, \end{cases}$$

Desde luego es fácil observar que 30 es un precio medio entre 36 y 28, así como entre 36 y 22, pero que no lo es entre 28 y 22. Esto es, no puede formarse una mezcla con los aceites de á 28 y de á $22 barril, que pueda venderse á $30, por ser este precio superior á los dos escogidos.

Si prescindimos por lo pronto del tercer aceite; cuyo precio es $22, nuestro problema sería determinar el número de barriles que debían tomarse de á 36 y de á $28, para formar una mezcla que pudiera venderse á \$30 pesos; y conforme á lo explicado y demostrado (342 –2° caso), procederíamos como sigue:

$$\$30 \left\{ \begin{array}{l} \$36 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 30-28=2 \text{ barriles de á } \$36 \\ 28 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 36-30=6 \quad ,, \quad \text{de á } 28 \end{array} \right.$$

En efecto con dos barriles de á \$36 y con 6 de á 28, queda formada una mezcla de ocho barriles que pueden venderse á \$30.

Si ahora hacemos abstracción del aceite de á \$28, podemos establecer un segundo problema que tendrá por objeto determinar el número de barriles de aceite que deben tomarse de á 36 y de á \$22, para formar una segunda mezcla que pueda venderse igualmente á \$30, el cual se resolverá como sigue:

$$\$30 \left\{ \begin{array}{l} \$36 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 30-22=8 \text{ barriles de á } \$36 \\ 22 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \; 36-30=6 \quad ,, \quad \text{de á } 22 \end{array} \right.$$

Efectivamente, con 8 barriles de á \$36 y 6 de á \$22 se hará una mezcla de 14 barriles que puede venderse también á \$30 barril.

Ahora bien, si se reunen estas dos mezclas, como el precio de cada una de ellas es de \$30 barril, es claro que el de su suma también lo será, y por tanto el problema general quedará resuelto,

tomando del aceite de á \$36.........2+8 barriles
,,   ,,   á 28.........6   ,,
,,   ,,   á 22.........6   ,,

En la práctica para resolver esta clase de problemas se procede como sigue:

$$\text{Precio medio } \$30 \left\{ \begin{array}{l} \$\,36 \ldots\ldots\ldots 2+8 \\ \;\;28 \ldots\ldots\ldots 6 \\ \;\;22 \ldots\ldots\ldots 6 \end{array} \right.$$

Comparando el precio medio con 36 y con 28, se tomarán 2 barriles de la primera clase y 6 de la segunda. Comparando después el precio medio con 36 y con 22, se tomarán 8 barriles más del primer aceite y 6 del segundo, resultando que para formar una mezcla que pueda venderse, á \$30 barril, deberían tomarse: 2+8=10 barriles de á \$36, 6 barriles del de á 28 y otros 6 del de á 22.

Como se habrá observado, se tiene siempre cuidado de comparar el precio medio con dos de aquellos de las clases del efecto que han de mezclarse, de los cuales uno es mayor y otro menor que él. Hemos dicho que los problemas de aligación son indeterminados, pero para fijar una de las relaciones en que puede hacerse la mezcla satisfaciendo las condiciones de la cuestión, se sigue el procedimiento de determinar la relación de las porciones de dos de las clases del efecto; en seguida se determina una nueva relación de las porciones de otras dos clases del efecto, se continúa así formando mezclas de dos en dos clases, y sumando las porciones de las mezclas binarias se tendrá la relación total de todas las clases del efecto que son objeto del problema.

Si tuviéramos aceite de cuatro clases: de á $36 barril, de á 28, de á 22 y de á $20, y lo mismo que antes se quisiera formar una mezcla que sin ganar ni perder pueda venderse á $30 barril, procederíamos como sigue:

$$\$30\begin{cases} \$36\ldots\ldots\ldots 2+8+10=20 \text{ barriles.} \\ \ \ 28\ldots\ldots\ldots 6 \quad\quad\quad\quad\quad\quad " \\ \ \ 22\ldots\ldots\ldots 6 \quad\quad\quad\quad\quad\quad " \\ \ \ 20\ldots\ldots\ldots 6 \quad\quad\quad\quad\quad\quad " \end{cases}$$

Como el precio medio de $30 es mayor que 28, que 22 y que $20, será forzoso comparar sucesivamente estos precios menores que el precio medio con $36, que es el único mayor que él, para determinar el número de barriles que se han de tomar de cada clase para formar tres mezclas binarias con el aceite de á $36 de modo que resulte cada una de ellas á $30 barril, y sumando después estas tres mezclas, la total podrá venderse á ese precio sin ganar ni perder. Comparando con el precio medio 36 y $28, deberán tomarse dos barriles de la 1.ª clase y 6 de la segunda. Comparando en seguida con el precio medio 36 y $22, deberán tomarse 8 barriles de la primera clase y 6 de la tercera. Por último, comparando con el precio medio 36 y $20, se tomarán 10 barriles de la primera clase y 6 de la cuarta. Sumando las porciones de estas tres mezclas binarias se tendrá la total, formada de 2+8+10=20 barriles del aceite de á $36, de 6 barriles del de á $28, 6 del de á 22 y de 6 del de á $20. En efecto, como verificación se tiene:

$$\$36\times20+28\times6+22\times6+20\times6=\$30\ (20+6+6+6)$$

En general, si se trata de determinar las porciones que deben tomarse de cada una de las clases de un efecto cuyos precios son: p, p', p'', p''', p^{IV}, etc., para formar una mezcla que sin ganar ni perder pueda venderse al precio medio m, procederemos como sigue para ir formando mezclas binarias que conforme á lo explicado (342—2º caso), satisfagan las condiciones del problema; y por último, se hará la suma de las porciones que forman las mezclas binarias.

Supondremos que $p>p'>p''>p'''>p^{\text{IV}}$..... y que siendo por ejemplo, $m<p'$ y que p, sea $m>p''$ que p''' y que p^{IV}. En tal supuesto observaremos que no es posible comparar m con p y p' porque ambos precios son mayores que m, y que tampoco pueden compararse p'', p''', y p^{IV} con m porque estos tres precios son menores que m.

$$m \begin{cases} p \ldots\ldots\ldots (m-p'')+(m-p^{\text{IV}}) \\ p' \ldots\ldots\ldots (m-p''') \\ p'' \ldots\ldots\ldots (p-m) \\ p''' \ldots\ldots (p'-m) \\ p^{\text{IV}} \ldots\ldots\ldots (p-m) \end{cases}$$

Así pues, comparando primero con m, p y p'' se tendrán las porciones $(m-p'')$ y $(p-m)$ de las dos clases cuyos precios son p y p'' para formar la primera mezcla binaria. Comparando en seguida con m, p' y p''' se tendrán las porciones $(m-p''')$ y $(p'-m)$ para la segunda mezcla. Por último, comparando m con p y con p^{IV} se tendrán las porciones $(m-p^{\text{IV}})$ y $(p-m)$ para la tercera mezcla. Este procedimiento equivale á formar sucesivamente las ecuaciones:

$$p\,(m-p'')+p''(p-m)=m\Big((m-p'')+(p-m)\Big)$$

$$p'(m-p''')+p'''(p'-m)=m\Big((m-p''')+(p'-m)\Big)$$

$$p\,(m-p^{\text{IV}})+p^{\text{IV}}(p-m)=m\Big((m-p^{\text{IV}})+(p-m)\Big)$$

y sumándolas ordenadamente se obtendrá: que la suma de los valores de las partes de la mezcla, estimando cada porción á su precio, es igual al valor de la mezcla al precio medio.

V. Se tiene plata de á \$9 y de á \$7'75 el marco, y debiéndose formar una liga cuyo precio sea \$8'25 se quiere determinar la relación en que han de mezclarse.

$$\$8'25 \begin{cases} \$\ 9'00 \ldots\ldots\ldots 0'50 \text{ marcos.} \\ \quad 7'75 \ldots\ldots\ldots 0'75 \quad \text{"} \end{cases}$$

quiere decir que se mezclarán en la relación de 0'50 marco de la primera plata con 0'75 marco de la segunda.

Como dijimos al explicar el segundo caso de la regla de aligación, puede agregarse una de estas condiciones: 1.ª, que en la mezcla éntre una porción determinada de una de las dos clases del efecto, ó 2.ª, que haya de formarse una cantidad determinada de mezcla.

Así, pues, en el último problema podría haberse agregado la condición, por ejemplo, de que en la liga entraran 100 marcos de la plata cuyo valor es \$9 el marco; ó bien la de que se habían de formar 500 marcos de la liga. Después de haber determinado por la fórmula general del segundo caso la relación en que deben mezclarse las cantidades, una simple proporción nos conduce á la resolución del problema con cualquiera de las expresadas condiciones.

1.º Supuesto que para que el marco de la liga valga \$8'25 es necesario tomar 0'50 marco de la primera plata y ligarlos con 0'75 marco de la segunda, cuando hayan de entrar en la liga 100 marcos de la primera, la siguiente proporción nos enseñará cuántos deben tomarse de la segunda clase de plata:

$$0'50 : 0'75 :: 100 : x=150 \text{ marcos.}$$

Por tanto, con 100 marcos de á \$9 deben ligarse 150 de á \$7'75 para que el marco de la liga tenga el valor de \$8'25.

2.º Si el total de la liga ha de ser 500 marcos, diremos: si en 1'25 marcos (suma de 0'50+0'75), de liga que tiene el precio dado, entran 0'50 de la plata de \$9, cuando el total de la liga sea 500 marcos, ¿cuántos deberán tomarse de la primera clase de plata?

La resolución de las dos siguientes proporciones nos conduce á la del problema con las expresadas condiciones:

$$1'25 : 500 :: 0'50 : x=200 \text{ marcos.}$$
$$1'25 : 500 :: 0'75 : y=300 \quad \text{,,}$$

En consecuencia, con 200 marcos de plata de á \$9 deben ligarse 300 de á \$7'75, para formar 500 de liga cuyo precio sea \$8'25.

344.—Casos de la regla de interés.—Hay dos especies de interés, el *simple* y el *compuesto*. En el primero solo produce interés el capital; en el segundo, los intereses que causa el capital se reunen á éste al fin, por ejemplo, de cada año, de lo cual resulta que va aumentando, y que no sólo el capital, sino también los intereses vencidos, producen interés en los años siguientes.

Distinguiremos dos casos, tanto en los problemas relativos al *interés simple*, como en los referentes al *interés compuesto*, de lo cual deduciremos cuatro fórmulas generales para resolver las cuestiones correspondientes de la regla de interés.

Es un ejemplo del primer caso el siguiente:

Se ha prestado á una persona la suma de \$2000 con el interés de 6 por ciento anual, y se quiere saber lo que esa persona adeuda al cabo de cinco años.

Es un ejemplo del segundo caso el siguiente:

Se ha arrendado una casa á una persona en \$2000 anuales, con la obligación de pagar el interés de 6 por ciento sobre las rentas que no cubra con puntualidad, y se trata de determinar cuánto adeuda esa persona al fin del quinto año por rentas y por intereses.

Como se habrá comprendido por estos ejemplos, en el primer caso no se debe más que una sola suma, y ésta es la que produce interés; en el segundo se deben tantas rentas como plazos se hayan vencido y además los intereses producidos por las rentas que no se pagaron oportunamente; pudiendo ser en uno y otro caso el interés simple ó compuesto.

345.—Fórmulas relativas á los casos de interés simple—Primer caso.—*Dado el capital que se presta ó impone, el tanto por ciento y el tiempo que es-*

tá impuesto, determinar al cabo de éste la suma del capital y sus intereses, á interés simple.

Llamando C el capital, i el interés ó tanto por ciento, t el tiempo y s la suma del capital é intereses que buscamos, tendremos la siguiente proporción:

$100\$: C :: i : x = \frac{Ci}{100}$ interés del capital en la unidad de tiempo.

Para calcular éste en el tiempo t bastará multiplicarlo por t, y siendo $\frac{Cit}{100}$ el interés del capital C en el tiempo t, la suma que buscamos

será: $$s = C + \frac{Cit}{100} \ldots\ldots\ldots (1)$$

una vez establecida esta fórmula, por medio de ella podrá determinarse cualquiera de las cantidades s, C, i ó t cuando se conozcan las otras tres.

Segundo caso.—*Dada una renta que se ha de pagar cada año, el número de años que deja de pagarse, y el tanto por ciento; determinar lo que se debe al cabo de ese número de años por la suma de las rentas vencidas y sus intereses á interés simple.*

Llamaremos R la renta ó cantidad que ha de pagarse periódicamente, t el número de años ó de plazos que dejan de pagarse, i el interés ó tanto por ciento, y s la suma que buscamos de las rentas y sus intereses

Se deberá

al fin del 1er. año, por rentas R... y de intereses 0.

„ „ 2.º „ „ „ $2R$ „ „ $0 + \frac{Ri}{100}$

$\frac{Ri}{100}$ es el interés que produce R, suma que se debía al fin del primer año, en el trascurso del segundo, resultado de la siguiente proporción:

$$100 : R :: i : \frac{Ri}{100}$$

Al fin del tercer año se deberá por rentas $3R$; y de intereses, además de $0 + \frac{Ri}{100}$ que se debían al fin del segundo, el interés producido en un año por la suma $2R$ que se adeudaba al fin del segundo año, esto es,

$$100 : 2R :: i : \frac{2Ri}{100}$$

en consecuencia, se deberá al fin del

3er. año, por rentas, $3R$, y de intereses, $0+\frac{Ri}{100}+\frac{2Ri}{100}$

Al fin del cuarto se deberá por rentas $4R$, y de intereses, además de $0+\frac{Ri}{100}+\frac{2Ri}{100}$ que se debían al fin del tercero, el interés producido en un año por 3 R que se adeudaba al fin del tercero, esto es:

$$100 : 3R :: i : \frac{3Ri}{100}$$

de lo cual resulta que se deberá al fin del

4° año, por rentas $4R$, y de intereses, $0+\frac{Ri}{100}+\frac{2Ri}{100}+\frac{3Ri}{100}$

Al cabo de t años se deberá por rentas tR

y por intereses $0+\frac{Ri}{100}+\frac{2Ri}{100}+\frac{3Ri}{100}+\ldots\ldots\frac{(t-1)Ri}{100}$

formando los intereses una progresión aritmética, cuya suma (320) es igual al primer término, más el último multiplicados por la mitad del número de términos, tendremos que la suma de las rentas ó intereses que buscamos es:

$$s=tR+\frac{(t-1)\,Rit}{100\times 2}$$ sacando $t\,R$ como factor

común $$s=tR\left(1+\frac{(t-1)\,i}{200}\right)\ldots\ldots(2)$$

fórmula por la cual podrá determinarse el valor de s, R, t ó i, conocidas las otras tres cantidades.

346—Problemas de las reglas de interés simple.—I.—*Se han impuesto* \$8500 *al* 8 *por* 100 *anual: se pregunta cuánto importa la suma del capital y los intereses á interés simple al cabo de* 5 *años.*

La fórmula correspondiente es $s=C+\frac{Cit}{100}$

Sustituyendo por cada cantidad su valor tendremos:

$$s=8500+\frac{8500\times 8\times 5}{100}=11900\$$$

será la suma buscada.

II.—*¿Al cabo de qué tiempo un capital que produce* 6 *por* 100 *anual se habrá duplicado á interés simple?*

Supuesto que al cabo del tiempo t que buscamos, el capital C se habrá duplicado, será la suma $s=2C$ y la fórmula (1) se convierte en

$$2C=C+\frac{C\,i\,t}{100}$$

quitando el denominador $\quad 200C=100C+Cit$

despejando á t $\quad t=\frac{200\ C-100\ C}{C\,i}=\frac{100}{i}$

sustituyendo por i su valor $\quad t=\frac{100}{i}=\frac{100}{6}=16$ años 8 meses

el capital se habrá duplicado al cabo de 16 años 8 meses.

III.—*Se ha arrendado una hacienda en 3000$ anuales, causando el interés de 6 por 100 anual las rentas que no se paguen á su vencimiento: se quiere determinar lo que se deberá al cabo de 7 años por rentas é intereses á interés simple.*

La fórmula correspondiente es $\quad s=tR\left(1+\frac{(t-1)\,i}{200}\right)$

Sustituyendo los valores del problema

$$s=7\times 3000\left(1+\frac{(7-1)\,6}{200}\right)=\$24780$$

El importe de las rentas y los intereses será 24780 pesos.

IV—*Arrendada una finca en \$3000 anuales, al fin del 7° año resulta que el arrendatario debe por rentas é intereses á interés simple \$24780; se quiere determinar el tanto por ciento que han producido las rentas vencidas.*

Siendo la incógnita i tendremos que despejar esta cantidad de la fórmula

$$s=tR\left(1+\frac{(t-1)\,i}{200}\right)$$

quitando el denominador y efectuando la multiplicación

$$200s=200tR+tR(t-1)i$$

despejando á i $\quad i=\frac{200(s-tR)}{t\times R(t-1)}$

sustituyendo los valores del problema

$$i=\frac{200(24780-7\times 3000)}{7\times 3000\times(7-1)}=6 \text{ por ciento}$$

el interés estipulado era 6 por ciento. Este problema puede servir como comprobación del anterior.

347.—Fórmulas relativas á los casos de interés compuesto.—Primer caso.—*Dado un capital* c, *que queda impuesto por un tiempo* t, *y el tanto por ciento* i; *determinar el importe* S *del capital y los intereses á interés compuesto.*

Ya hemos dicho que cuando el interés es compuesto, no solo el capital produce interés, sino también los intereses vencidos, los cuales se reunen al capital al fin de cada año ó de cada plazo en que se conviene pagar el interés. Así, pues, si 100 producen i de interés, éstos 100 pesos se convierten al fin del primer año en $100+i$, y esta suma será la que producirá el interés respectivo en el segundo año. Para determinar la suma en que se convierte la unidad de moneda al fin del primer año, estableceremos la siguiente proporción:

$$100 : 100+i :: 1 : \frac{100+i}{100}$$

Para simplificar haremos:

$$\frac{100+i}{100}=q$$

Supuesto que la unidad de moneda en el transcurso de un año se convierte en q, para determinar en lo que se convertirá en los años siguientes, tendremos:

$$1 : q :: q : q^2 \text{ al fin del } 2^o \text{ año}$$
$$1 : q :: q^2 : q^3 \text{ al fin del } 3^{er} \text{ año}$$

y 1 peso se convertirá en q^t al fin de t años.

Ahora bien, siendo c el capital impuesto, para calcular el importe S del capital y sus intereses al cabo del tiempo t, tendremos:

$$1 : q^t :: c : S=cq^t$$

En consecuencia el problema de que tratamos se resolverá por las fórmulas:

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad S=cq^t \;........(3)$$

y de estas fórmulas podremos despejar á cualquiera de las cantidades que entran en ellas conociendo las otras tres.

Segundo caso.—*Dada una renta* R *que debe pagarse cada año, el número* t *de años que deja de pagarse, y el tanto por ciento* i; *determinar la suma* s *que se debe por las rentas y sus intereses á interés compuesto.*

Al fin del 1^{er} año sólo se deberá la renta R.

Al fin del 2^o año se deberá además de la renta R, correspondiente á este 2^o año, la suma en que se ha convertido la cantidad R que se debía al fin del primer año en el transcurso del segundo. Esta suma en que se ha convertido R durante un año, haciendo $\frac{100+i}{100}=q$, la determinaremos por la siguiente proporción:

$$1 : q :: R : Rq$$

Esto es, al fin del 2^o año se deberá: $R+Rq$

Al fin del 3^{er} año se deberá, además de la renta R de ese año, la suma en que se haya convertido con los intereses de un año la cantidad $R+Rq$ que se debía al fin del 2^e año, y la cual se determinará por la proporción

$$1 : q :: R+Rq : Rq+Rq^2$$

En consecuencia, al fin del 3er. año se deberá $R+Rq+Rq^2$.

Al fin del 4.º año, se deberá además de la renta R del 4.º año, la cantidad en que se haya convertido la suma $R+Rq+Rq^2$ por los intereses que produce en un año y la cual es $Rq+Rq^2+Rq^3$.

Por tanto, al fin del 4.º año, se deberá $R+Rq+Rq^2+Rq^3$ y al cabo de t años se deberá $R+Rq+Rq^2+Rq^3 \ . \ . \ . +Rq^{t-1}$

Formando estos términos una progresión geométrica creciente cuya razón es q, su suma será igual (322) al último término multiplicado por la razón, menos el primero, dividida la diferencia por la razón menos uno; esto es:

$$s=\frac{Rq^{t-1}q-R}{q-1}=\frac{Rq^t-R}{q-1}=\frac{R(q^t-1)}{q-1}$$

En consecuencia, el problema que nos ocupa podrá resolverse por medio de las fórmulas

$$q=\frac{100+1}{100} \qquad s=\frac{R(q^t-1)}{q-1} \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (4)$$

Conociendo s é i podrá determinarse R fácilmente, y valiéndose de los logaritmos puede despejarse á t; pero si quisiéramos despejar á q, para determinar á i, obtendríamos una ecuación mixta de grado superior de cuya resolución no nos hemos ocupado en estos Elementos de Algebra.

348.—Problemas de la regla de interés compuesto.—I.—*Se han impuesto \$12000 al 5 p$\frac{0}{0}$ anual, y se quiere determinar á lo que monta el capital con los intereses al cabo de 4 años á interés compuesto.*

La fórmula correspondiente es: $S=cq^t$

poniendo los valores de las cantidades $S=12000\times1{\text{'}}05^4$

ejecutando las operaciones resulta $S=14586{\text{'}}075$ pesos, valor del capital y sus intereses á interés compuesto.

II.—*¿Al cabo de qué tiempo se habrá duplicado un capital impuesto al 6 p$\frac{0}{0}$ anual á interés compuesto?*

Supuesto que el capital se ha de duplicar, la suma S será igual á $2\,C$ y la fórmula (3) se convierte en

$$2\,C=C\left(\frac{100+i}{100}\right)^t$$

suprimiendo C, tomando los logaritmos, y poniendo por i su valor se tiene:

$$\log.\ 2=t\times\log.\ (\tfrac{106}{100})$$

despejando á t $\quad t=\frac{\log.\ 2}{\log.\ 1{\text{'}}06}=\frac{0{\cdot}30103000}{0{\text{'}}02530587}=11{\text{'}}896$ años

Así es que en poco menos de 12 años, el capital se habrá duplicado

III. *¿Cuál será el tanto por ciento á que deba imponerse un capital á interés compuesto, para que se duplique al cabo de 18 años?*

La fórmula (3) se convierte en $2C=C\left(\frac{100+i}{100}\right)^{18}$

suprimiendo C, y tomando los logaritmos se tiene

$$\log. 2=18. \log. (100+i)-18 \log. 100$$

de donde $\log. (100+i)=\frac{\log. 2+18. \log. 100}{18}=\frac{0{\cdot}30103000+36}{18}$

ejecutando la operación: $\log. (100+i)=2{\cdot}01672388=\log. 103{\cdot}92592$

luego $i=3{\cdot}92592$ p$\frac{0}{0}$

para que el capital se duplique á los 18 años debe imponerse al 4 p$\frac{0}{0}$ próximamente.

IV. *Se ha arrendado una finca en $3000 anuales, causando el interés de 6 p$\frac{0}{0}$ las rentas cuando no se cubran con puntualidad, y se trata de saber lo que se debe al cabo de tres años por rentas é intereses, á interés compuesto.*

Las fórmulas (4) correspondientes son:

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad s=\frac{R(q^t-1)}{q-1}$$

sustituyendo los valores de las cantidades:

$$s=\frac{3000\,[\,(1{\cdot}06)^3-1\,]}{0{\cdot}06}$$

ejecutando las operaciones se tiene: $s=\$9550{\cdot}80$

importe de las rentas é intereses al fin de los tres años.

Regla de descuento.—Una suma de dinero que debe percibirse dentro de determinado plazo tiene un valor menor que la misma cantidad de dinero de la cual puede disponerse en el acto. La diferencia entre el valor actual y el valor á plazo es lo que se llama *descuento.* Consideraremos tres clases de descuento: el *comercial* que se llama *exterior;* el descuento á *interés simple ó interior*, y el descuento á *interés compuesto.*

Representaremos por i el tanto por 100 en la unidad de tiempo; por t los plazos, ó fracciones de plazos trascurridos, estimados en la misma unidad de tiempo; por S la suma que vence dentro el tiempo t, y por s el valor actual de esa suma después de deducir el descuento.

Descuento comercial.—A $100 se les descuenta i en la unidad de tiempo, en el tiempo t se les descontará $i\,t$. Por tanto, podemos establecer la siguiente proporción:

$$100 : 100-i\,t :: S : s$$

de la que resulta:

$$s=S\left(1-\frac{i\,t}{100}\right)\;.\;.\;.\;(1)$$

si representamos por d el descuento, tendremos:

$$d=S-s$$

$$d=\frac{S\,i\,t}{100}\;.\;.\;.\;(2)$$

Descuento á interés simple.—En este caso se toma por valor actual de un capital, S, pagadero dentro del tiempo t, el de otro capital s que impuesto á *interés simple* hasta la fecha del vencimiento, llegue á tener el mismo valor que el primero, S. Por tanto, siendo $i\,t$ el interés de \$100 en el tiempo t, podemos establecer la siguiente proporción:

$$100+i\,t:100::S:s$$

de la que se obtiene:

$$s=S\left(\frac{100}{100+i\,t}\right)\;.\;.\;.\;(3)$$

y el descuento $\qquad d=S-s$

será $\qquad d=\frac{S\,i\,t}{100+i\,t}\;.\;.\;.\;(4)$

Descuento á interés compuesto.—En este caso el valor actual de un capital S pagadero dentro del tiempo t, será el de otro menor s, que impuesto á *interés compuesto* hasta la fecha del vencimiento llegue á ser igual á S.

El primer caso de la regla de interés compuesto (347) nos ha conducido á las fórmulas:

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad S=c\,q^t$$

en la cual c, representa á s en el caso de que nos ocupamos, por lo cual sustituyendo c por s y despejando esta cantidad, tendremos:

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad s=\frac{S}{q^t}\;.\;.\;.\;(5)$$

y el descuento $\qquad d=S-s$

será $\qquad d=S\left(1-\frac{1}{q^t}\right)\;.\;.\;.\;(6)$

349.—Anualidades.—Hay veces en las que se impone un capital á interés con la condición de obtener una renta anual fija por determinado tiempo, y esta renta se va rebajando del capital y sus intereses, de modo que quede completamente amortizado ó extinguido al cabo del tiempo estipulado. Sobre esta base están establecidas las rentas vitalicias.

Llamando C el capital, R la renta anual que se trata de obtener, t el tiempo ó número de años que debe disfrutarse la renta é i el tanto por ciento, tendremos que si durante un año 100 se convierten en $100+i$, la unidad de moneda se convertirá en $\frac{100+i}{100}$ conforme á la proporción:

$$100 : 100+i :: 1 : \frac{100+i}{100}$$

Para simplificar haremos: $\frac{100+i}{100}=q$

Por tanto, si durante un año la unidad de moneda se convierte en q, el capital C al fin del 1er. año se habrá convertido en Cq, pero como hay que pagar cada año la renta R, quedará en poder del prestamista

al fin del 1er. año $Cq-R$

Esta suma en el transcurso del 2º año se convertirá en Cq^2-Rq de la que hay que deducir la anualidad R, quedando en poder del prestamista

al fin del 2º año Cq^2-Rq-R

Esta suma en el transcurso del tercer año se convierte en ..... Cq^3-Rq^2-Rq, de la que deduciendo la anualidad R quedará en manos del prestamista

al fin del 3er. año Cq^3-Rq^2-Rq-R

Esta suma durante el 4º año se convierte en $Cq^4-Rq^3-Rq^2-Rq$, de la que deduciendo la anualidad R quedará en poder del prestamista

al fin del 4º año $Cq^4-Rq^3-Rq^2-Rq-R$

Bajo las mismas consideraciones, y supuesto que al fin de t años el capital debe quedar completamente extinguido, tendremos:

$$Cq^t-Rq^{t-1}-Rq^{t-2}- \ldots -Rq-R=0$$

ó $$Cq^t=R+Rq+ \ldots \ldots Rq^{t-2}+Rq^{t-1}$$

siendo el 2º miembro de esta ecuación una progresión geométrica en la que la razón es q, su suma será igual (322) á $\frac{Rq^{t-1}\times q-R}{q-1}$

de donde $$Cq^t=\frac{Rq^t-R}{q-1}=\frac{R(q^t-1)}{q-1}$$

Despejando á C, tendremos para resolver el problema de anualidades las fórmulas

$$q=\frac{100+i}{100} \qquad C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)} \quad \ldots\ldots (5)$$

Por medio de estas fórmulas podrá determinarse R conociendo C é i; pero si se quisiera determinar á i, que está en función de q, conociendo á C y á R se tropezaría con la dificultad de tener que resolver una ecuación mixta de grado superior con respecto á q, de cuya resolución no nos hemos ocupado en estos Elementos del Algebra.

NOTA.—Deducidas las fórmulas que preceden, relativas á los problemas de interés, de descuento y de anualidades, partiendo de la base de que el interés i representa el tanto por ciento al año, unidad escogida para estimar el tiempo, y la renta R representa la renta en la misma unidad de tiempo; cuando en las aplicaciones, el interés no se estime por 100, ó este interés no esté referido á la unidad de tiempo que conste en los otros datos de la cuestión, antes de hacer las sustituciones correspondientes en las fórmulas, es preciso hacer las reducciones respectivas calculando el interés por 100 en la unidad de tiempo escogida.

Si, por ejemplo, impuesto el capital de $10000 al interés simple de $\frac{1}{2}$ p% mensual se quiere saber cuánto se debe al cabo de 5 años; antes de sustituir en la fórmula (1) tendremos que cambiar $\frac{1}{2}$ p% mensual en 6 p% al año, ó dejando el $\frac{1}{2}$ p% mensual convertir 5 años en 60 meses.

Si tuviéramos que resolver el mismo problema á interés compuesto tendríamos que estimar el tiempo en meses, que es el plazo ó unidad adoptada para el pago de los réditos, y la fórmula sería:

$$S=cq^t=10000\times 1{,}005^{60}$$

ó bien calcular el interés anual á que equivale el $\frac{1}{2}$ p% mensual á interés compuesto, para lo que procederíamos como sigue:

$$100 : 100+i :: 1 : q \text{ en el primer mes}$$
$$1 : q :: q : q^2 \text{ en el } 2^o \text{ mes.}$$

luego 1 peso se convertiría en q^{12} en un año.

En nuestro caso $q^{12}=q'=1{,}005^{12}=1{,}061\ 678$

y la fórmula apropiada sería:

$$S=cq'^t=10000\times 1{,}061\ 678^5$$

siendo ambos resultados iguales.

350.—Problemas de anualidades.—I—*¿Qué capital deberá imponerse al 6 p% anual para poder disfrutar por 10 años de la anualidad de. . . $2500?*

Las fórmulas respectivas son $q=\frac{100+i}{100}$ $C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}$

sustituyendo: $q=1'06$ $C=\frac{2500[(1'06)^{10}-1]}{(1'06)^{10}\times 0'06}$

Para obtener el resultado haremos uso de los logaritmos y comenzaremos por determinar el valor de $1'06^{10}$ cuyo logaritmo es igual á $10\times \log. 1'06$

$$\begin{array}{ll} \log. 1'06= \ldots & 0'02530587 \\ & \underline{\qquad\quad 10} \\ \log. 1'06^{10}= \ldots & 0'2530587=\log. 1'790848 \end{array}$$

de donde resulta $(1'06)^{10}-1=0'790848$

Ahora calcularemos por una parte el logaritmo del numerador y por otra el del denominador del valor de C.

$$\begin{array}{llr|lr} & & \text{Numerador.} & & \text{Denominador.} \\ \log. & 2500 \ldots & 3'397\,9400 & \log. 0'06 \ldots & \bar{2}'778\,1513 \\ " & 0'790848 \ldots & \underline{\bar{1}'898\,0930} & " \ (1'06)^{10} \ldots & \underline{0'253\,0587} \\ & & 3'296\,0330 & & \bar{1}'031\,2100 \\ \text{Menos log. denomin.} & & \underline{\bar{1}'031\,2100} & & \\ \log. C \ldots & & 4'264\,8230 & =\log. \$18400'22 & \end{array}$$

El capital buscado que puede producir la anualidad de $2500 por 10 años impuesto al 6 por ciento, es $18400'22.

Debemos hacer observar que este resultado obtenido con gran facilidad por el empleo de los logaritmos, aunque sumamente aproximado al verdadero, no es completamente exacto, en razón de que los logaritmos de las tablas de Callet solo se han calculado con la aproximación de siete cifras decimales.

II.—*Qué anualidad podrá producir el capital de $18400'22 impuesto al 6 por 100 anual para quedar amortizado al cabo de diez años?*

Las fórmulas correspondientes son $q=\frac{100+i}{100}$ $C=\frac{R(q^t-1)}{q^t(q-1)}$

sustituyendo los valores y despejando á R

$q = 1'06 \qquad R = \dfrac{18400'22(1'06)^{10} \times 0'06}{(1'06)^{10} - 1}$

Haremos uso de los logaritmos, y comenzaremos por calcular el valor de $(1'06)^{10}$

log. 1'06 . . . . 0'025 30587
10

log. $1'06^{10}$ . . . . 0'253 0587 = log. 1'790 848
de donde resulta que. . . $(1'06)^{10}-1$ = 0'790 848

Calcularemos separadamente el log. del numerador y el del denominador de R para que restando el segundo del primero se determine el log. y por consiguiente el valor de R.

	Numerador.		Denominador.
log. 18400'22	4'264 8230		
log. 0'06	$\bar{2}$'778 1513	log. 0'790848	$\bar{1}$'898 0930
log. $(1'06)^{10}$	0'253 0587		
	3'296 0330		
Menos log. del denominador.	$\bar{1}$'898 0930		
log. R	3'397 9400 = log. $2500		

La anualidad que puede producir el capital dado en las condiciones del problema, es $2500.

III.—*A una persona se le prestan $18400'22 que han de ganar el 6* p§ *al año á interés compuesto, y para pagarlos ofrece dar un abono anual de $2500; se quiere calcular ¿al cabo de cuántos años estarán amortizados el capital y sus respectivos intereses?*

Las fórmulas aplicables al problema son:

$$q = \frac{100+i}{100} \qquad C = \frac{R(q^t - 1)}{q^t(q-1)}$$

y con el objeto de despejar á t, que es la incógnita, quitaremos los denominadores en la última fórmula, y desarrollando el cálculo, tendremos:

$$Cq^t(q-1) = Rq^t - R, \qquad q^t[R - C(q-1)] = R$$

$$q^t = \frac{R}{R - C(q-1)} = \frac{2500}{2500 - 18400'22 \times 0'06} = \frac{2500}{1395'9868}$$

$$t.\ \log.\ 1'06 = \log.\ 2500 - \log.\ 1395'9868$$

y finalmente $$t = \frac{\log.\ 2500 - \log.\ 1395'9868}{\log.\ 1'06}$$

log. 2500 . . . . 3'397 9400
—log. 1395'987 . . .3'144 8813

0'253 0587 log. 1'06 . . .0'0253 0587

$$t=\frac{0'2530587}{0'02530587}=10 \text{ años.}$$

351.—Regla de dos falsas suposiciones.—Muchas veces para resolver un problema de primer grado que no contiene más que una sola incógnita, en lugar de plantear el problema y resolver la ecuación, según lo hemos explicado (263 y 264), se emplea el método llamado de *falsa posición*, y el cual consiste en suponer un valor arbitrario para la incógnita, en ejecutar con este *supuesto* las operaciones indicadas por el enunciado del problema, y determinar el *error* entre el resultado obtenido y el buscado; en dar en seguida otro valor también arbitrario á la incógnita, determinar el error correspondiente, y deducir por último, de los dos valores *supuestos* y de sus *errores* respectivos, el verdadero valor de la incógnita.

La forma más general que podemos dar á una ecuación de primer grado con una sola incógnita, después de haber quitado los denominadores, de haber trasladado algunas cantidades de un miembro á otro para que todas sean positivas, y de sacar la incógnita como factor común, es:

$$ax+b=cx+d \quad . \ . \ . \ (1)$$

Esta ecuación, conforme á lo demostrado en el número 267, no da-mite más que una resolución, no pudiendo verificarse sino en el caso de dar á x el valor correspondiente para satisfacer la ecuación que se ha derivado de las condiciones del problema. Si suponemos que el valor de la incógnita sea s, cantidad mayor ó menor que x, no podremos tener $as+b=cs+d$, sino que forzosamente resultará un error que llamaremos e y se tendrá:

$$ax+b=cs+d+e \quad . \ . \ . \ (2)$$

restando de esta ecuación la (1) se tiene:

$$a(s-x)=c(s-x)+e.$$

despejando á e $\quad (a-c)\ (s-x)=e \quad . \ . \ . \ (3)$

Si supusiéramos que el valor de x fuera s' en la ecuación primitiva (1), tendríamos otro error e' y la ecuación se convierte en:

$$as'+b=cs'+d+e' \quad . \ . \ . \ (4)$$

restando de esta ecuación la (1), se tiene:

$$a(s'-x)=c(s'-x)+e'$$

despejando á e' $\quad (a-c)(s'-x)=e' \quad . \; . \; . \; (5)$

Dividiendo la (3) por la (5) queda $\quad \frac{s-x}{s'-x}=\frac{e}{e'}$

quitando los denominadores $\quad se'-xe'=s'e-xe$

trasladando $\quad se'-s'e=xe'-xe$

Despejando á x $\quad x=\frac{se'-s'e}{e'-e} \quad . \; . \; . \; (6)$

fórmula que nos enseña que para obtener el valor de la incógnita en una ecuación de primer grado por el método de dos falsas suposiciones, debe practicarse la siguiente

Regla.—*Después de haber dado sucesivamente dos valores á la incógnita y calculado los errores respectivos, multiplíquese el primer supuesto por el error del otro, y recíprocamente el segundo supuesto por el error del primero, y atendiendo á los signos de los errores, divídase la diferencia de estos productos por la diferencia de los errores: el cociente será la incógnita buscada.*

352.—Problemas resueltos por la regla de dos falsas suposiciones.—I.—*Un padre tiene 40 años y su hijo 10, se pregunta ¿dentro de cuántos años la edad del padre será triple de la de su hijo?*

Supuestos.	Errores.
8	+6
4	—2

$$\frac{(8\times-2)-(4\times6)}{-2-6}$$

$$\frac{-16-24}{-8}=5$$

Supongamos primero que el número de años buscado sea 8. Entonces la edad del padre será 48 años, y la del hijo 18, pero como el triple de 18 no es 48 sino 54, el error será de 6 años. En seguida supondremos que el número buscado sea 4. La edad del padre será 44 años, la del hijo 14, y como á su triple le faltan 2 para dar 44 el segundo error será —2.

Los productos recíprocos de los supuestos por los errores, tomados con sus signos, dan por diferencia—40; que dividida por —8, diferencia de los errores, da 5. En efecto dentro de 5 años, la edad del padre será 45 triple de 15, edad de su hijo.

II.—*Una persona ofrecía dar ocho pesos cada vez que se le duplicase el dinero que tenía: habiéndose efectuado así tres veces consecutivas, no le quedó nada. Se pregunta ¿cuántos pesos tenía esa persona?*

Supongamos primero que la persona tenía 10 pesos. Duplicada esta suma, y deduciendo 8 la primera vez, le quedarían 12 pesos. Duplicada esta cantidad y rebajando 8, le quedarían la segunda vez 16 pesos, los que duplicados y rebajando 8 por última vez, quedan, en lugar de cero 24, que es el error. Si en seguida suponemos que la persona tenía 9 pesos, veremos, que duplicando tres veces consecutivas esa suma, y rebajando en cada una de ellas 8, en vez de cero le quedarían 16 pesos que es el error.

Supuestos.	Errores.
10	+24
9	+16

$$\frac{10\times16-9+24}{16-24}$$

$$\frac{160-216}{-8}=7$$

Dividiendo —56 diferencia de los productos recíprocos de los supuestos por los errores tomados con sus signos, por —8, diferencia de los errores, se obtiene por cociente 7, número que satisface las condiciones del problema.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.

*(353)—Definiciones.—Hay en e cálculo algunas cuestiones en las que es necesario prever las diferentes maneras con que pueden disponerse las cantidades literales ó los números distintos que forman un término, bien sea considerando todas las cantidades ó solamente algunas de ellas.

Si el término está compuesto de una sola cantidad, es claro que no podrá haber más que una sola disposición.

Con dos cantidades *a*, *b*, pueden formarse:

dos *ordenaciones:*	*a*, *b*
dos *permutaciones:*	*ab*, *ba*
y una *combinación:*	*ab*.

Con tres cantidades *a*, *b*, *c* podrán formarse:

tres *ordenaciones:*		de una en una:	*a*, *b*, *c*,
seis	*id.*	de dos en dos:	*ab*, *ba*, *ac*, *ca*, *bc*, *cb*.
seis *permutaciones:*			*abc*, *bac*, *acb*, *cab*, *bca*, *cba*.
tres *combinaciones*		de dos en dos:	*ab*, *ac*, *bc*.
y una	*id.*	de tres:	*abc*.

Asi pues, *se entiende por ordenaciones los resultados que se obtienen dis-*

poniendo m *cantidades en todos los órdenes posibles, tomándolas de una en una, de dos en dos, de tres en tres..... de* m—1 *en* m—1, *con la condición de no repetir ninguna cantidad en cada grupo, y de que el número de cantidades de que se forme ha de ser menor que el número* m *total de cantidades*

Se llaman permutaciones los resultados que se obtienen con m *cantidades disponiendo unas á continuación de las otras en todos los órdenes posibles, de manera que no se omita ni se repita ninguna cantidad.*

Se llaman combinaciones las ordenaciones diferentes entre sí que pueden hacerse con m *cantidades; debiendo ser cada grupo distinto de los otros, no por el orden de colocación, sino por ser diversa cuando menos una de las cantidades que lo forman.*

Así pues, es una condición común á estas tres clases de disposiciones que no se repita una misma cantidad en cada grupo. En las ordenaciones no entran todas las cantidades que se consideran, y son diferentes entre sí por el orden de la colocación. Las permutaciones son ordenaciones en las que entran todas las cantidades; y las combinaciones son ordenaciones diferentes unas de otras, no por el orden, sino por las cantidades que forman cada grupo; además, las combinaciones difieren de las ordenaciones en que cuando menos se forman los grupos con dos cantidades, y en que pueden formarse con el número total de ellas. A las combinaciones se les suele llamar productos diferentes porque en efecto lo son cuando las cantidades están representadas por letras.

*(354)—Ordenaciones.—*Dado un número* m *de cantidades* a, b, c, d...... *vamos á determinar el número total de ordenaciones que pueden hacerse formando grupos de* n *en* n *cantidades, debiendo ser* n *menor que* m.

Conocido el número de ordenaciones que pueden hacerse con m letras ó cantidades, formando grupos de $(n-1)$ en $(n-1)$ letras; si nos imaginamos estas ordenaciones escritas en una línea horizontal, y si debajo de la primera ordenación escribimos al fin de las cantidades que la forman cada una de las letras $m-(n-1)$ que no entran en dicha ordenación, resultará una columna vertical compuesta de tantos grupos como sean las letras $m-(n-1)$ no consideradas en la primera ordenación. Con la segunda ordenación podremos también formar $m-[n-1]$ ordenaciones diferentes por la última letra, poniendo al fin de las cantidades que la forman cada una de las que no forman parte de ella; y haciendo lo mismo con la tercera, cuarta, etc., ordenaciones de $(n-1)$ en $(n-1)$ cantidades, resultarán tantas ordenaciones de n en n letras como indique el producto del número de ordenaciones formadas de $(n-1)$

en $(n-1)$, multiplicadas por el número $m-(n-1)$ de cantidades no consideradas en las ordenaciones de $(n-1)$ en $(n-1)$ cantidades.

Por ejemplo, si considerando cuatro cantidades a, b, c, d debajo de cada una de las cuatro ordenaciones que pueden formarse de una en una letra,

$$O_1^m = a, \quad b, \quad c, \quad d,$$

agregamos cada una de las letras no consideradas, tendremos:

$$O_2^m = \begin{cases} ab, & ba, \quad ca, \quad da, \\ ac, & bc, \quad cb, \quad db, \\ ad, & bd, \quad cd, \quad dc, \end{cases}$$

siendo cuatro las ordenaciones que pueden formarse de una en una letra, y siendo tres las que pueden agregarse á cada una de las cuatro primeras ordenaciones, resultan 4×3 ordenaciones de dos en dos letras.

En general, si suponemos conocido el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de $(n-1)$ en $(n-1)$, y representamos este número de ordenación por O_{n-1}^m determinaremos el número de ordenaciones que podrán hacerse con las mismas m cantidades formando grupos de n en n multiplicando el número O_{n-1}^m por el número de letras no consideradas en las ordenaciones de $(n-1)$ en $(n-1)$, y estas letras son: $m-(n-1)=m-n+1$. Resultado que quedará cifrado en la fórmula

$$O_n^m = O_{n-1}^m (m-n+1) \quad . \quad . \quad . \quad [1]$$

Si, por ejemplo, queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades combinándolas de dos en dos, aplicando la fórmula [1] tendremos que siendo $n=2$, $n-1=1$, y como el número de ordenaciones que pueden hacerse con m letras tomándolas de una en una es m, se tiene $O_{n-1}^m = m$. Por otra parte

$$m-n+1 = m-2+1 = m-1,$$

Así pues, sustituyendo en la fórmula (1) resulta:

$$O_2^m = m\,(m-1)$$

Si queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de tres en tres, tendremos que $O_{n-1}^m = m\,(m-1)$, según acabamos de verlo, y el factor $m-n+1=m-3+1=m-2$; luego sustituyendo en la fórmula (1) se tiene

$$O_3^m = m\,(m-1)\,(m-2)$$

Si queremos determinar el número de ordenaciones que pueden hacerse con m cantidades tomándolas de cuatro en cuatro, tendremos: $n=4$, $0^m_{n-1}=m(m-1)(m-2)$, y $m-n+1=m-4+1=m-3$; luego, sustituyendo en la fórmula (1), resulta:

$$0^m_4=m(m-1)(m-2)(m-3)$$

y en general representando 0^m_n el número de ordenaciones que con m cantidades pueden hacerse tomándolas en grupos de n en n tendremos:

$$0^m_n=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots[m-(n-1)] \quad . \; . \quad (2)$$

Es decir, que el número de ordenaciones se compone del producto de los números consecutivos decrecientes m, (m—1), (m—2)..... *hasta* m—(n—1) *inclusive.*

*(355.)—Permutaciones.—Hemos visto que *se llaman permutaciones á los resultados que se obtienen con* m *cantidades disponiendo unas á continuación de las otras en todos los órdenes posibles, de manera que en cada grupo no se omita ni se repita ninguna cantidad.* Por consiguiente, las permutaciones son ordenaciones en las que entran todas las cantidades que se consideran.

Si representamos por P_m el número de permutaciones que pueden hacerse con m cantidades, es claro que cuando se hace $n=m$, $0^m_n=P_m$; luego para determinar el número de permutaciones que pueden hacerse con m cantidades, bastará hacer en la fórmula (2) $n=m$ y se tiene:

$$P_m=m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots 2\times 1 \quad . \; . \quad (3)$$

invirtiendo el orden de los factores y observando que siendo 1 el último factor, el penúltimo es 2, el antepenúltimo es 3, etc., se obtiene

$$P_m=1\times 2\times 3\times 4\ldots(m-2)(m-1)\,m \quad . \; . \quad (4)$$

Es decir, que el número de permutaciones se determina formando el producto de la serie de los números enteros comprendidos desde 1 hasta m inclusive.

*(356).—Combinaciones.—Hemos dicho que *se entiende por combinaciones las ordenaciones que con* m *cantidades pueden hacerse diferentes entre sí, no por el orden de colocación, sino por estar compuesto cada grupo cuando menos de una cantidad diversa.*

Si conociéramos el número de combinaciones que pueden formarse con m cantidades tomándolas de n en n y las escribiéramos en una línea horizontal, y si debajo de cada grupo formamos todas las permutaciones á que pueda dar lugar, resultarán las ordenaciones que con m cantidades pueden formarse de n en n. Por ejemplo, considerando cuatro letras, las combinaciones de tres en tres son:

Combinaciones: $C_3^4 = abc,\quad abd,\quad acd,\quad bcd,$

Haciendo las permutaciones de cada grupo..........
$$\left\{\begin{array}{llll} bac, & bad, & cad, & cbd, \\ acb, & adb, & adc, & bdc, \\ cab, & dab, & dac, & dbc, \\ bca, & bda, & cda, & cdb, \\ cba, & dba, & dca, & dcb, \end{array}\right.$$

resulta como se ve, el número total de ordenaciones que con cuatro cantidades pueden formarse tomándolas de tres en tres. Luego llamando o las ordenaciones, c las combinaciones y p las permutaciones, tendremos: $o = c \times p$

ó en general $$O_n^m = C_n^m \times P_n$$

despejando á C_n^m y sustituyendo por O_n^m y por P_n sus valores [2] y [4] se tiene:

$$C_n^m = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots[m-(n-1)]}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ldots\ldots\ldots(n-1)\ n}\ldots\ldots(5)$$

Tal es la fórmula que sirve para determinar el número de combinaciones que pueden formarse con m cantidades en grupos de n en n cantidades.

* (357).—Deducción de la regla para formar los coeficientes de los términos en la fórmula del binomio de Newton.—Si después de haber obtenido el producto de m factores binomios $(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d)\ldots$ hacemos $a=b=c=d\ldots\ldots\ldots$ obtendremos el valor de $(x+a)^m$, por lo que para tener el desarrollo del binomio elevado á una potencia, bastará formar el producto indicado, y hacer en seguida los segundos términos de los binomios iguales entre sí.

Ejecutando sucesivamente la multiplicación de $x+a$ por $x+b$, multiplicando en seguida el resultado por $x+c$, y después el producto por $x+d$, y sacando x y sus potencias como factor común en cada resultado se tiene:

$$(x+a)\,(x+b) = x^2 + x(a+b) + ab\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ [1]$$
$$(x+a)\,(x+b)\,(x+c) = x^3 + x^2\,(a+b+c) + x\,(ab+ac+bc) + abc\ldots.\ (2)$$
$$\begin{aligned}(x+a)\,(x+b)\,(x+c)\,(x+d) = {} & x^4 + x^3\,(a+b+c+d) \\ & + x^2\,(ab+ac+bc+ad+bd+cd) \\ & + x\,(abc+abd+acd+bcd) + abcd\ldots..\ [3]\end{aligned}$$

Este procedimento nos va á permitir descubrir la ley de la formación de los coeficientes de los términos del desarrollo de la potencia de un binomio. Para facilitar nuestras explicaciones nos fijaremos en el último resultado. Haciendo en la ecuación [3] $a=b=c=d$, el primer miembro se convierte en $(x+a)^4$, y respecto al segundo se observa que:

El primer término es x^4 y tiene por coeficiente la unidad.

En el segundo término, x^3 está multiplicado por $a+b+c+d$, factor que conforme á nuestro supuesto, se convertirá en a, repetido tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de una en una. En el caso general de buscar el desarrollo de $(x+a)^m$, el primer término sería x^m, y en el segundo el factor de x^{m-1} sería a, multiplicado por el número de combinaciones que con m letras pueden formarse, tomándolas de una en una, y como $C_1^m=m$, éste sería el coeficiente del segundo término. En el tercer término de nuestro resultado [3], cuando los segundos términos de los factores binomios son iguales, x^2 resulta multiplicado por a^2 repetida tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de dos en dos, y como $C\frac{4}{2}=\frac{4.3}{1.2}=6$, este número deberá ser el coeficiente de este término. En el caso general de $(x+a)^m$, en el tercer término del desarrollo el factor de x^{m-2} sería a^2, multiplicada por el número que expresa las combinaciones que con m letras pueden hacerse, tomándolas de dos en dos, y como $C_2^m=\frac{m(m-1)}{1.2}$, esta expresión será el coeficiente del tercer término.

En el cuarto término de nuestro resultado [3], y bajo el supuesto de ser $a=b=c=d$, el factor de x será a^3 repetida tantas veces como son las combinaciones que con cuatro letras pueden hacerse tomándolas de tres en tres, y como $C\frac{4}{3}=\frac{4\times3\times2}{1.2.3}=4$, este número será el coeficiente del cuarto término. En el caso general de $(x+a)^m$, en el cuarto término del desarrollo, el factor de x^{m-3} será a^3 multiplicada por el número de combinaciones que con m letras pueden hacerse tomándolas de tres en tres, y como $C_3^m=\frac{m(m-1)\,(m-2)}{1.2.3}$ esta expresión será el coeficiente de dicho cuarto término.

En nuestro resultado [3], y bajo el supuesto de que $a=b=c=d$, el último término se convierte en a^4; y en el caso general de $(x+a)^m$ el último término será a^m.

De lo que antecede se infiere que el desarrollo de la potencia de un binomio será:

$$(x+a)^m = x^m + m.x^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}a^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}a^3$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^{m-4}a^4 \ldots\ldots + m.x.a^{m-1} + a^m$$

que es la fórmula deducida por Newton y en la cual los coeficientes de cada término expresan las combinaciones que con m letras pueden hacerse tomándolas sucesivamente de una en una, de dos en dos, de tres en tres, etc., obteniéndose los mismos valores que los dados por la regla prescrita en el número 305.

FIN

ÍNDICE

ALGEBRA.

INTRODUCCIÓN Y PRIMERAS OPERACIONES CON LAS EXPRESIONES ENTERAS.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

DISCUSIÓN DE LAS ECUACIONES DE PRIMER GRADO.

FÓRMULA DE NEWTON PARA ELEVAR UN BINOMIO Á UNA POTENCIA.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

DISCUSIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

PROPORCIONES, REGLA DE TRES Y PROGRESIONES.

LOGARITMOS.

REGLAS DE ALIGACIÓN, INTERÉS, DESCUENTO Y ANUALIDADES.

ORDENACIONES, PERMUTACIONES Y COMBINACIONES.